# TRAITÉ

DE

# TRIGONOMÉTRIE.

Paris. — Imprimerie de BACHELIER, rue du Jardinet, 12.

# TRAITÉ

DE

# TRIGONOMÉTRIE



PAR J.-A. SERRET,
Examinateur pour l'admission à l'École Polytechnique.



PARIS,
BACHELIER, IMPRIMEUR-LIBRAIRE
DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, DU BUREAU DES LONGITUDES, ETC.,
QUAI DES AUGUSTINS, 55.

1850



*Tout exemplaire du présent Ouvrage qui ne portera pas, comme ci-dessous, la griffe de l'Éditeur, sera contrefait. Les mesures nécessaires sont prises pour atteindre, conformément à la loi, les fabricants de ces exemplaires.*

Bachelier

# AVERTISSEMENT.

Cet ouvrage est surtout destiné aux jeunes gens qui se préparent aux Écoles du Gouvernement. Les quatre premiers livres renferment les matières exigées pour l'admission à l'École Navale et à l'École Militaire de Saint-Cyr. Les candidats à l'École Polytechnique auront, en outre, à étudier une partie du cinquième livre, qui traite de la Trigonométrie sphérique, et une partie du sixième, qui renferme des développements sur la théorie si importante des fonctions circulaires.

Quelques passages, dont l'étude n'est pas indispensable, ont été imprimés en petits caractères.

# TABLE DES MATIÈRES.

## LIVRE PREMIER.

### ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE DES FONCTIONS CIRCULAIRES.

#### DÉFINITIONS ET NOTIONS PRÉLIMINAIRES.



## LIVRE DEUXIÈME.



### ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE DES FONCTIONS CIRCULAIRES.

#### PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES.



## LIVRE TROISIÈME.

### CONSTRUCTION DES TABLES DE FONCTIONS CIRCULAIRES.

# LIVRE QUATRIÈME.

## TRIGONOMÉTRIE RECTILIGNE.



# LIVRE CINQUIÈME.

## TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE.



# LIVRE SIXIÈME.

## COMPLÉMENT DE LA THÉORIE DES FONCTIONS CIRCULAIRES.



FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

# TRAITÉ

DE

# TRIGONOMÉTRIE.

## LIVRE PREMIER.

### ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE DES FONCTIONS CIRCULAIRES.

#### DÉFINITIONS ET NOTIONS PRÉLIMINAIRES.

**Des fonctions. — Sur la mesure des longueurs. — Des arcs de cercle. — Du sinus. — De la tangente. — De la sécante. — Du cosinus, de la cotangente et de la cosécante. — Réduction des arcs au premier quadrant. — Expressions des arcs qui correspondent à une ligne trigonométrique donnée. — Des fonctions circulaires inverses. — Relations entre les lignes trigonométriques d'un même arc.**

---

*Des fonctions.*

1. Lorsque deux grandeurs *variables* sont telles, qu'à chaque valeur de l'une correspond une valeur déterminée de l'autre, on dit que ces grandeurs sont *fonction* l'une de l'autre. Par exemple, dans un cercle, la circonférence et la surface sont fonctions du rayon; et réciproquement, le rayon est fonction de la circonférence ou de la surface.

La *Trigonométrie* est fondée sur la théorie de certaines fonctions qui naissent de la considération du cercle, et que l'on nomme, pour cette raison, *fonctions circulaires*. Nous commencerons par exposer les éléments de cette théorie.

*Sur la mesure des longueurs.*

2. Soit O (*fig.* 1) un point fixe d'une ligne $x'x$ droite

ou courbe, et supposons qu'à partir de ce point O, on prenne sur $x'x$ diverses longueurs OA, OA', OA'', etc.; ces longueurs, étant rapportées à une même unité, seront représentées par des nombres, et nous conviendrons d'affecter ces nombres du signe + ou du signe —, suivant que les longueurs dont ils expriment la mesure sont portées dans un sens ou dans l'autre. En d'autres termes, les longueurs portées dans un sens (celui qu'on voudra) seront représentées par des nombres *positifs*, et les autres par des nombres *négatifs*. Quelquefois, afin d'abréger le langage, nous emploierons la dénomination de *longueurs positives et négatives*, pour désigner les longueurs représentées par des nombres positifs et négatifs.

Si, par exemple, on convient que dans la *fig.* 1 le sens des longueurs positives soit celui de $Ox$ indiqué par la flèche, et que les points A, A', A'' soient respectivement situés à 7, 9, 6 mètres du point O, si en outre on prend le mètre pour unité linéaire, les longueurs OA, OA', OA'' seront respectivement représentées par $+7$, $+9$, $-6$. Supposons que $a$ soit le nombre positif ou négatif qui représente ainsi une longueur comptée sur $x'x$ à partir du point O, le nombre d'unités renfermées dans cette longueur sera $+a$ ou $-a$, suivant que $a$ sera un nombre positif ou un nombre négatif.

3. Plus généralement, si l'on imagine un point mobile partant de O, et se mouvant tantôt dans un sens, tantôt dans l'autre, les diverses parties de $x'x$ décrites par le point mobile seront regardées comme positives ou négatives, suivant qu'elles auront été décrites par un mouvement dans le sens $Ox$, ou dans le sens opposé $Ox'$; si l'on désigne par $a$, $b$, $c$, $d$, etc., les nombres positifs ou négatifs qui mesurent les longueurs décrites successivement par le mobile, et par $x$ le nombre qui représente la distance de O au point où le mobile a cessé de se mouvoir, on aura,

dans tous les cas,

$$x = a + b + c + d + \ldots .$$

Pour exprimer le même résultat, il eût fallu plusieurs formules sans la convention que nous avons faite. Aussi cet exemple peut-il déjà donner une idée de l'importance de cette convention.

4. Soit $x'x$ (*fig.* 2) une droite située dans un plan quelconque; lorsque nous aurons à considérer les distances à cette droite, des différents points M, M', M'', etc., du plan, nous regarderons comme positives les perpendiculaires situées d'un côté quelconque de $x'x$, et comme négatives celles qui seront situées de l'autre côté; en d'autres termes, les premières seront représentées par des nombres positifs, les autres par des nombres négatifs.

*Des arcs de cercle.*

5. Soit O (*fig.* 3) un cercle dont le rayon est pris pour unité [*], en sorte que la circonférence est égale à $2\pi$, et le quadrant (quart de circonférence) à $\frac{\pi}{2}$. Soit A un point fixe de la circonférence, et M un point mobile partant de A et se mouvant dans le sens de AB, indiqué par la flèche, que nous adopterons pour les *arcs positifs;* l'arc AM est nul à l'origine du mouvement, il augmente ensuite, et sa valeur est $2\pi$ quand le point mobile est revenu au point de départ. Mais on peut imaginer que le mouvement se continue autant que l'on voudra, en sorte que le point mobile peut décrire un arc composé d'une ou de plusieurs circonférences. Et si le mouvement du point M a lieu dans le sens contraire à celui que nous avons supposé, l'arc

[*] Il en sera toujours ainsi dans ce qui va suivre.

décrit est négatif, mais sa *valeur absolue* prend tous les états de grandeur à partir de zéro.

En résumé, l'arc de cercle, c'est-à-dire le nombre qui le mesure, est susceptible de recevoir toutes les valeurs entre $-\infty$ et $+\infty$.

6. L'extrémité fixe A de l'arc variable AM sera souvent désignée dans la suite sous le nom d'*origine de l'arc*.

Si $\alpha$ désigne le plus petit des arcs positifs qui ont une même extrémité M, tous les arcs $x$ qui ont cette même extrémité sont donnés par la formule

$$x = 2k\pi + \alpha,$$

où $k$ représente un entier indéterminé positif, nul ou négatif. En effet, soit $x$ un arc ayant son extrémité en M (*fig.* 3); pour décrire cet arc, on ira d'abord de A en M en suivant le chemin $\alpha$, et comme il faut rester en ce point, on ne peut avoir à ajouter qu'un nombre entier de circonférences. Si l'arc $x$ est négatif, pour le décrire on ira d'abord de A en M, en suivant le chemin $-(2\pi - \alpha)$ ou $-2\pi + \alpha$, et devant rester en ce point M, on ne peut avoir à ajouter qu'un nombre entier négatif de circonférences. Ainsi, dans tous les cas, l'arc $x$ est égal à $\alpha$, plus un nombre entier positif, nul ou négatif de circonférences.

7. *Arcs complémentaires.* — Deux arcs positifs tous deux, ou l'un positif et l'autre négatif, sont dits *complémentaires* ou *compléments* l'un de l'autre, lorsque leur somme est égale à un quadrant, c'est-à-dire à $\frac{\pi}{2}$.

Soit A (*fig.* 3) l'origine des arcs; menons les diamètres AA′ et BB′ perpendiculaires entre eux, et supposons que le sens des arcs positifs soit celui de AB indiqué par la flèche; je dis que si l'on considère le point B comme une

nouvelle origine d'arcs, et que le sens des nouveaux arcs positifs soit celui de BA, deux arcs complémentaires ayant respectivement A et B pour origines, auront la même extrémité M.

En effet, soit $x$ un arc positif ou négatif ayant A pour origine et M pour extrémité, le complément est $\frac{\pi}{2} - x$; et comme B est, par hypothèse, l'origine de ce complément, pour décrire l'arc $\frac{\pi}{2} - x$ on ira d'abord de B en A, et à partir du point A il restera à décrire l'arc $-x$, le sens des arcs positifs étant celui de BA, ou à décrire l'arc $x$, en supposant que le sens des arcs positifs soit celui de AB. Or, de cette manière, on revient évidemment au point M. La proposition énoncée est donc démontrée.

8. *Arcs supplémentaires.* — Deux arcs positifs tous deux, ou l'un positif et l'autre négatif, sont dits *supplémentaires* ou *suppléments* l'un de l'autre, lorsque leur somme est égale à une demi-circonférence, c'est-à-dire à $\pi$.

### *Du sinus.*

9. A étant l'origine des arcs (*fig.* 3), et AB le sens des arcs positifs, menons les diamètres perpendiculaires AA′ et BB′. Soit $x$ le nombre positif, nul ou négatif qui mesure l'arc variable dont l'extrémité M peut prendre sur la circonférence toutes les positions possibles, et abaissons MP perpendiculaire sur AA′. Conformément au principe du n° 4, nous conviendrons de regarder la perpendiculaire MP comme positive ou négative, suivant que le point M sera sur la demi-circonférence ABA′ ou sur la demi-circonférence A′B′A, et nous appellerons *sinus* de l'arc $x$ le nombre positif ou négatif qui mesure cette perpendiculaire. D'après cela, le sinus des arcs qui ont leur extrémité en M

est $+$ MP; le sinus de ceux qui ont leur extrémité en M″ est $-$ M″P′. On peut ainsi formuler la définition suivante:

*Le sinus d'un arc est le nombre positif ou négatif qui mesure la perpendiculaire abaissée de l'extrémité de cet arc sur le diamètre qui passe par l'origine.*

Si $y$ désigne le sinus de l'arc variable $x$, nous écrirons

$$y = \sin x,$$

$y$ est une fonction de $x$; c'est la première des fonctions circulaires dont il a été question au n° 1.

10. *Variation du sinus.* — Nous allons examiner de quelle manière varie cette fonction $\sin x$, quand on fait varier l'arc $x$.

Si $x$ croît de o à $\frac{\pi}{2}$, $\sin x$ croît de o à 1 en passant évidemment par toutes les valeurs intermédiaires; $x$ croissant de $\frac{\pi}{2}$ à $\pi$, $\sin x$ décroît de 1 à o en passant encore par toutes les valeurs intermédiaires : on voit que de o à $\pi$, $\sin x$ atteint sa valeur maxima pour $x = \frac{\pi}{2}$. Si $x$ croît de $\pi$ à $\frac{3\pi}{2}$, $\sin x$ est négatif, et continue de décroître de o à $-1$; enfin $x$ croissant de $\frac{3\pi}{2}$ à $2\pi$, $\sin x$ est toujours négatif et croît de $-1$ à o. Si l'on fait croître $x$ de $2\pi$ à $4\pi$, ou de $4\pi$ à $6\pi$, ou, etc., $\sin x$ reprend périodiquement les mêmes valeurs et dans le même ordre. Quand $x$ décroît de o à $-\infty$, $\sin x$ prend, au signe près, les mêmes valeurs que quand $x$ croît de o à $+\infty$; en d'autres termes, on a, quel que soit $x$,

$$(1) \qquad \sin(-x) = -\sin x,$$

car les extrémités de deux arcs $x$ et $-x$, égaux et de signes contraires, sont à égale distance du diamètre AA′, l'une d'un côté, l'autre de l'autre.

En résumé, on a

$$\sin 0 = 0,\ \sin\frac{\pi}{2} = +1,\ \sin\pi = 0,\ \sin\frac{3\pi}{2} = -1,\ \sin 2\pi = 0,$$

$$\sin(-x) = -\sin x.$$
$$\sin(2k\pi + x) = \sin x.$$

La dernière de ces relations, où $k$ désigne un entier quelconque positif, nul ou négatif, exprime une propriété remarquable de la fonction $\sin x$. Elle consiste en ce que $\sin x$ ne change pas quand $x$ augmente ou diminue de $2\pi$; on exprime cette propriété en disant que $\sin x$ est une *fonction périodique* de $x$, dont la période est égale à $2\pi$.

**11.** Soit $x$ un arc quelconque positif ou négatif. Les deux arcs $x$ et $x + \pi$ sont évidemment terminés aux extrémités d'un même diamètre; par conséquent leurs sinus sont égaux et de signes contraires: on a donc

(2) $$\sin(\pi + x) = -\sin x.$$

Ainsi la fonction $\sin x$ ne fait que changer de signe, quand on augmente la variable $x$ de la *demi-période* $\pi$. La relation précédente ayant lieu quel que soit $x$, on peut changer $x$ en $-x$, et il vient alors

$$\sin(\pi - x) = -\sin(-x),$$

ou, d'après la formule (1),

(3) $$\sin(\pi - x) = \sin x.$$

Ainsi, *deux arcs supplémentaires ont des sinus égaux*.

Puisque le sinus d'un arc ne change pas quand on ajoute à cet arc un multiple $2k\pi$ de $2\pi$, on déduit, des formules (2) et (3),

$$\sin[(2k+1)\pi + x] = -\sin x,$$
$$\sin[(2k+1)\pi - x] = \sin x,$$

qui ont lieu quel que soit $x$.

12. *De quelques arcs dont le sinus se calcule facilement.* — Considérons un arc moindre qu'une demi-circonférence, AM par exemple (*fig.* 3); son sinus est positif et égal à MP. Or, si l'on prolonge MP jusqu'à sa rencontre en M″ avec la circonférence, la corde MM″ sera double du sinus MP, et l'arc sous-tendu par cette corde sera aussi double de l'arc AM. On peut donc dire que

*Le sinus d'un arc moindre qu'une demi-circonférence est égal à la moitié de la corde qui sous-tend l'arc double.*

En particulier, le côté du polygone régulier de $n$ côtés inscrit dans le cercle de rayon 1 est égal au double de $\sin\frac{\pi}{n}$.

Le côté du carré inscrit dans le cercle de rayon 1 étant égal à $\sqrt{2}$, on a, d'après ce qui précède,

$$\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2};$$

le côté de l'hexagone régulier étant 1, on a

$$\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2};$$

pareillement, le côté du triangle équilatéral inscrit étant $\sqrt{3}$, on a aussi

$$\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

On peut encore obtenir $\sin\frac{\pi}{10}$; car le côté $z$ du décagone régulier inscrit dans le cercle du rayon 1 est, comme on sait, le plus grand segment de l'unité partagée en moyenne et extrême raison : on a

$$z^2=1\times(1-z)$$

ou

$$z^2+z-1=0.$$

De cette équation on tire $z = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$; on a donc

$$\sin\frac{\pi}{10} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4}.$$

*De la tangente.*

13. Soient toujours A l'origine des arcs (*fig.* 3), et AB le sens des arcs positifs. Désignons aussi, comme précédemment, par $x$ l'arc variable dont l'extrémité M se meut sur la circonférence; menons par le point A la tangente $yy'$, et soit AT la portion de cette tangente comprise entre l'origine de l'arc $x$, et le diamètre OM qui passe par son extrémité. Conformément au principe du n° 2, nous regarderons les longueurs AT comme positives ou négatives, suivant qu'elles seront portées dans le sens A$y$ ou dans le sens opposé A$y'$, et nous appellerons *tangente* de l'arc $x$, le nombre positif ou négatif qui mesure la longueur AT. D'après cela, + AT est la tangente des arcs qui ont leur extrémité en M ou en M'', et — AT' est celle des arcs qui ont leur extrémité en M' ou en M'''; nous pouvons ainsi énoncer la définition suivante :

*La tangente d'un arc est le nombre positif ou négatif qui mesure la portion de tangente menée par l'origine de l'arc, et terminée au diamètre qui passe par l'extrémité.*

Si $y$ désigne la tangente de l'arc $x$, nous écrirons

$$y = \operatorname{tang} x;$$

$\operatorname{tang} x$ est la deuxième des fonctions circulaires mentionnées au n° 1.

14. *Variation de la tangente.* — Nous allons examiner de quelle manière varie la fonction $\operatorname{tang} x$, quand $x$ varie de $-\infty$ à $+\infty$.

Si $x$ croît de o à $\frac{\pi}{2}$, tang $x$ croît à partir de o, et peut devenir plus grande que tout nombre donné; si $x$ croît de $\frac{\pi}{2}$ à $\pi$, tang $x$ est négative, et croît de $-\infty$ à o; $x$ croissant de $\pi$ à $\frac{3\pi}{2}$, tang $x$ redevient positive, et croît de o à $+\infty$; enfin si $x$ croît de $\frac{3\pi}{2}$ à $2\pi$, tang $x$ est négative, et croît de $-\infty$ à o. Si l'on fait croître $x$ de $2\pi$ à $4\pi$ ou de $4\pi$ à $6\pi$, ou, etc., tang $x$ reprend périodiquement les mêmes valeurs et dans le même ordre. Si $x$ varie de o à $-\infty$, tang $x$ prend, au signe près, les mêmes valeurs que quand $x$ varie de o à $+\infty$; en d'autres termes, on a, quel que soit $x$,

$$\tan(-x) = -\tan x, \tag{1}$$

car les extrémités de deux arcs $x$ et $-x$, égaux et de signes contraires, sont à égale distance du diamètre AA′, et d'un même côté de BB′; les tangentes des deux arcs sont donc égales et de signes contraires.

En résumé, on a, en désignant par $\varepsilon$ un arc positif variable qui décroît jusqu'à zéro,

$$\text{tang}\, 0 = 0,\quad \text{tang} \lim\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) = +\infty,\quad \text{tang} \lim\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right) = -\infty,$$

$$\text{tang}\, \pi = 0,\quad \text{tang} \lim\left(\frac{3\pi}{2} - \varepsilon\right) = +\infty,\quad \text{tang} \lim\left(\frac{3\pi}{2} + \varepsilon\right) = -\infty,$$

$$\text{tang}\, 2\pi = 0,$$

$$\text{tang}(-x) = -\text{tang}\, x,$$

$$\text{tang}(2k\pi + x) = \text{tang}\, x.$$

Dans la dernière de ces relations, $k$ désigne un entier quelconque.

15. Soit $x$ un arc quelconque positif ou négatif; les deux arcs $x$ et $x + \pi$ sont terminés aux extrémités d'un même

diamètre, par conséquent leurs tangentes sont égales, et l'on a

(2) $$\tang(\pi + x) = \tang x.$$

On voit que la fonction $\tang x$ ne change pas, quand on augmente l'arc de $\pi$; cette fonction est donc périodique et a la période $\pi$.

En changeant $x$ en $-x$, dans la relation précédente, on a

$$\tang(\pi - x) = \tang(-x),$$

ou, d'après la formule (1),

(3) $$\tang(\pi - x) = -\tang x;$$

d'où l'on conclut que *deux arcs supplémentaires ont leurs tangentes égales et de signes contraires.*

Comme la tangente d'un arc ne change pas quand on ajoute $\pi$ à cet arc, on déduit, des formules précédentes,

$$\tang(k\pi + x) = \tang x,$$
$$\tang(k\pi - x) = -\tang x,$$

en désignant par $k$ un entier positif, nul ou négatif.

16. *De quelques arcs dont la tangente se calcule facilement.* — On voit aisément que le côté du polygone régulier de $n$ côtés, circonscrit au cercle de rayon 1, a pour valeur $2 \tang \frac{\pi}{n}$. On peut, par la géométrie, trouver le côté du carré, de l'hexagone et du triangle équilatéral circonscrits, et par conséquent les valeurs de $\tang \frac{\pi}{4}$, $\tang \frac{\pi}{6}$ et $\tang \frac{\pi}{3}$; on trouve ainsi :

$$\tang \frac{\pi}{4} = 1,$$

$$\tang \frac{\pi}{3} = \sqrt{3},$$

$$\tang \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

### *De la sécante.*

**17.** Soient toujours A l'origine des arcs (*fig.* 3), et AB le sens des arcs positifs; désignons aussi, comme précédemment, par $x$ l'arc variable dont A est l'origine, et menons, par son extrémité M, la tangente MK, qui rencontre en K le diamètre AA′. Conformément au principe du n° **2**, nous regarderons les longueurs OK comme positives ou négatives, suivant qu'elles seront dirigées dans le sens de OA ou dans le sens opposé, et nous appellerons *sécante* de l'arc $x$, le nombre positif ou négatif qui mesure la longueur OK. D'après cela, sur la *fig.* 3, les arcs qui ont leur extrémité en M ou en M‴ ont pour sécante +OK, et ceux qui ont leur extrémité en M′ ou en M″ ont pour sécante — OK′. Ainsi, généralement,

*La sécante d'un arc est le nombre positif ou négatif qui mesure la portion du diamètre mené par l'origine, comprise entre le centre et la tangente à l'extrémité de l'arc.*

Si $y$ désigne la sécante de l'arc $x$, nous écrirons

$$y = \text{séc}\, x;$$

séc $x$ est la troisième des fonctions circulaires mentionnées au n° **1**.

**18.** *Variation de la sécante.* — Nous allons examiner de quelle manière varie la fonction séc $x$, quand $x$ varie de $-\infty$ à $+\infty$.

Si $x$ croît de 0 à $\frac{\pi}{2}$, séc $x$ croît à partir de 1, et peut surpasser tout nombre donné; $x$ croissant de $\frac{\pi}{2}$ à $\pi$, séc $x$ est négative et croît de $-\infty$ à $-1$; $x$ croissant de $\pi$ à $\frac{3\pi}{2}$, séc $x$ est toujours négative et décroît de $-1$ à $-\infty$; enfin,

$x$ croissant de $\frac{3\pi}{2}$ à $\pi$, séc $x$ est positive et décroît de $+\infty$ à $+1$. Si l'on fait croître $x$ de $2\pi$ à $4\pi$, ou de $4\pi$ à $6\pi$, ou, etc., séc $x$ reprend périodiquement les mêmes valeurs et dans le même ordre. Si $x$ décroît de $0$ à $-\infty$, séc $x$ prend exactement les mêmes valeurs que quand $x$ croît de $0$ à $+\infty$ ; en d'autres termes, on a, quel que soit $x$,

$$(1) \qquad \text{séc}(-x) = \text{séc}\, x,$$

car deux arcs $x$ et $-x$, égaux et de signes contraires, ont leurs extrémités à égale distance du diamètre AA', et situées d'un même côté par rapport à BB' : les tangentes au cercle menées par ces extrémités viennent se couper sur AA', et, par conséquent, les deux arcs ont même sécante.

En résumé, on a, en désignant par $\varepsilon$ un arc positif variable qui décroît jusqu'à zéro,

$$\text{séc}\, 0 = +1, \quad \text{séc} \lim\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right) = +\infty, \quad \text{séc} \lim\left(\frac{\pi}{2} + \varepsilon\right) = -\infty,$$

$$\text{séc}\, \pi = -1, \quad \text{séc} \lim\left(\frac{3\pi}{2} - \varepsilon\right) = -\infty, \quad \text{séc} \lim\left(\frac{3\pi}{2} + \varepsilon\right) = +\infty,$$

$$\text{séc}\, 2\pi = +1,$$

$$\text{séc}(-x) = \text{séc}\, x,$$

$$\text{séc}(2k\pi + x) = \text{séc}\, x.$$

La dernière de ces relations, où $k$ désigne un entier quelconque positif ou négatif, exprime que la fonction séc $x$ est périodique et a la période $2\pi$.

19. Soit $x$ un arc positif ou négatif, les deux arcs $x$ et $x + \pi$ sont terminés aux extrémités d'un même diamètre, les tangentes au cercle menées par ces extrémités sont deux parallèles également éloignées du centre, elles vont donc rencontrer le diamètre AA' en deux points situés de part et d'autre du centre, à des distances égales, et, par conséquent, les sécantes des deux arcs sont égales et de signes

contraires. On a donc

(2) $$\text{séc}(\pi + x) = -\,\text{séc}\, x,$$

ce qui montre que la fonction séc $x$ ne fait que changer de signe, quand on augmente la variable $x$ de la demi-période $\pi$.

Si, dans la relation (2), on change $x$ en $-x$, il vient

$$\text{séc}(\pi - x) = -\,\text{séc}(-x),$$

ou, d'après la formule (1),

(3) $$\text{séc}(\pi - x) = -\,\text{séc}\, x,$$

d'où l'on conclut que *deux arcs supplémentaires ont leurs sécantes égales et de signes contraires.*

Comme la sécante d'un arc ne change pas, quand on augmente ou qu'on diminue l'arc d'un multiple de $2\pi$, on déduit, des formules (2) et (3),

$$\text{séc}[(2k+1)\pi \pm x] = -\,\text{séc}\, x,$$

où $k$ désigne un entier quelconque.

### *Du cosinus, de la cotangente et de la cosécante.*

**20.** On nomme *cosinus*, *cotangente* et *cosécante* d'un arc, le sinus, la tangente et la sécante de l'arc complémentaire.

Soient toujours A l'origine des arcs (*fig.* 3), AB le sens des arcs positifs, et $x$ un arc quelconque ayant M pour extrémité. Pour avoir le cosinus, la cotangente et la cosécante de l'arc $x$, il faut prendre le sinus, la tangente et la sécante de l'arc $\frac{\pi}{2} - x$, dont l'origine est en B (n° 7), et l'extrémité en M, le sens des arcs positifs comptés à partir du point B étant celui de BA. Donc, si, du point M, on abaisse une perpendiculaire MQ sur BB' et une autre MP sur AA', à cause de OP = MQ, cos $x$ sera égal à + OP ou à — OP, suivant que le point P sera sur OA ou sur son prolongement OA'. De

même si, par le point B, on mène la tangente $zz'$, et par le point O le rayon OM qui coupe $zz'$ en S, $\cot x$ sera égale à $+$ BS ou à $-$ BS, suivant que le point S sera du même côté que l'origine A par rapport à BB', ou du côté opposé. Enfin si H désigne le point où la tangente au cercle en M rencontre le diamètre BB', coséc $x$ sera égale à $+$ OH ou à $-$ OH, suivant que le point H sera situé sur OB ou sur OB'.

21. *Variations du cosinus, de la cotangente et de la cosécante.* — On voit par la figure, ou l'on déduit immédiatement des équations

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} \cos x &= \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \\ \cot x &= \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \\ \operatorname{coséc} x &= \sec\left(\frac{\pi}{2} - x\right), \end{aligned}\right.$$

que

$x$ croissant de o à $\frac{\pi}{2}$, $\cos x$ décroît de 1 à o, $\cot x$ de $+\infty$ à o, et coséc $x$ de $+\infty$ à $+1$ :

$x$ croissant de $\frac{\pi}{2}$ à $\pi$, $\cos x$ et $\cot x$ sont négatifs, mais coséc $x$ reste positive; $\cos x$ décroît de o à $-1$, $\cot x$ de o à $-\infty$, et coséc $x$ croît de $+1$ à $+\infty$ :

$x$ croissant de $\pi$ à $\frac{3\pi}{2}$, $\cos x$ continue d'être négatif, mais $\cot x$ devient positive et coséc $x$ négative; $\cos x$ croît de $-1$ à o, $\cot x$ décroît de $+\infty$ à o, et coséc $x$ croît de $-\infty$ à $-1$ :

$x$ croissant de $\frac{3\pi}{2}$ à $2\pi$, $\cos x$ devient positif, $\cot x$ et coséc $x$ négatives; $\cos x$ croît de o à $+1$, $\cot x$ décroît de o à $-\infty$, et coséc $x$ de $-1$ à $-\infty$ :

$x$ croissant de $2\pi$ à $4\pi$, ou de $4\pi$ à $6\pi$, ou, etc., $\cos x$,

$\cot x$ et $\operatorname{coséc} x$ reprennent périodiquement les mêmes valeurs et dans le même ordre : et, enfin, que si $x$ varie de o à $-\infty$, $\cos x$ prend les mêmes valeurs que quand $x$ varie de o à $+\infty$, $\cot x$ et $\operatorname{coséc} x$ prennent aussi les mêmes valeurs, mais changées de signes ; en d'autres termes, on a, quel que soit $x$,

$$\cos(-x) = \cos x,$$
$$\cot(-x) = -\cot x,$$
$$\operatorname{coséc}(-x) = -\operatorname{coséc} x.$$

En résumé, on a, en désignant par $\varepsilon$ un arc positif variable qui décroît jusqu'à zéro,

$$\cos 0 = 1,\quad \cos\frac{\pi}{2} = 0,\quad \cos\pi = -1,\quad \cos\frac{3\pi}{2} = 0,\quad \cos 2\pi = 0;$$

$$\begin{cases} \cot\lim\varepsilon = +\infty, \quad \cot\frac{\pi}{2} = 0, \quad \cot\lim(\pi-\varepsilon) = -\infty, \\ \cot\lim(\pi+\varepsilon) = +\infty, \quad \cot\frac{3\pi}{2} = 0, \quad \cot\lim(2\pi-\varepsilon) = -\infty; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \operatorname{coséc}\lim\varepsilon = +\infty, \quad \operatorname{coséc}\frac{\pi}{2} = +1, \quad \operatorname{coséc}\lim(\pi-\varepsilon) = +\infty, \\ \operatorname{coséc}\lim(\pi+\varepsilon) = -\infty, \quad \operatorname{coséc}\frac{3\pi}{2} = -1, \quad \operatorname{coséc}\lim(2\pi-\varepsilon) = -\infty; \end{cases}$$

et

$$\cos(2k\pi + x) = \cos x,$$
$$\cot(2k\pi + x) = \cot x,$$
$$\operatorname{coséc}(2k\pi + x) = \operatorname{coséc} x.$$

Ces dernières équations, où $k$ désigne un entier quelconque, expriment que $\cos x$, $\cot x$ et $\operatorname{coséc} x$ sont des fonctions périodiques ayant la période $2\pi$.

**22.** On déduit aussi des équations (1), et de celles trouvées aux nos **11**, **15** et **19**, que l'on a, quel que soit $x$,

$$(2)\qquad \begin{cases} \cos(\pi + x) = -\cos x, \\ \cot(\pi + x) = \cot x, \\ \operatorname{coséc}(\pi + x) = -\operatorname{coséc} x; \end{cases}$$

d'où il suit que $\cos x$ et $\operatorname{coséc} x$ changent de signe quand $x$ augmente de la demi-période $\pi$, tandis que $\cot x$ ne change pas. Il en résulte que la fonction $\cot x$ a la période $\pi$.

En changeant $x$ en $-x$ dans les formules précédentes, il vient

$$(3)\quad \begin{cases} \cos(\pi - x) = -\cos(-x) = -\cos x, \\ \cot(\pi - x) = \cot(-x) = -\cot x; \\ \operatorname{coséc}(\pi - x) = -\operatorname{coséc}(-x) = \operatorname{coséc} x; \end{cases}$$

ce qui fait voir que *deux arcs supplémentaires ont leurs cosécantes égales, leurs cosinus égaux au signe près, ainsi que leurs cotangentes.*

On déduit facilement, des formules précédentes,

$$\cot(k\pi \pm x) = \pm \cot x,$$
$$\cos[(2k+1)\pi \pm x] = -\cos x,$$
$$\operatorname{coséc}[(2k+1)\pi \pm x] = \mp \operatorname{coséc} x,$$

où $k$ désigne un entier quelconque positif, nul ou négatif.

### *Réduction des arcs au premier quadrant.*

**23.** Les six fonctions circulaires dont nous venons de commencer l'étude sont souvent désignées sous le nom de *lignes trigonométriques,* à cause de leur usage dans la trigonométrie proprement dite.

Il est très-important de remarquer que chacune des lignes trigonométriques d'un arc $x$ prend toutes les valeurs qu'elle est susceptible d'acquérir dans la variation indéfinie de $x$, lorsqu'on ne fait varier $x$ que dans un intervalle de deux quadrants. Ainsi, quand $x$ varie de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$, le sinus, la tangente, la cotangente et la cosécante prennent toutes les valeurs dont ces lignes trigonométriques sont susceptibles. Et si $x$ varie de $0$ à $\pi$, le cosinus, la tangente, la

cotangente et la sécante prennent aussi toutes les valeurs dont elles sont susceptibles. Enfin, si l'on n'a égard qu'aux valeurs absolues, les six lignes trigonométriques prennent toutes leurs valeurs quand l'arc varie de o à $\frac{\pi}{2}$, ou de $\frac{\pi}{2}$ à $\pi$, ou, etc.

On a souvent besoin, étant donné un arc $x$, de trouver l'arc compris entre o et $\frac{\pi}{2}$, qui, abstraction faite des signes, a les mêmes lignes trigonométriques que $x$. Cette opération se nomme *réduction d'un arc au premier quadrant*. Pour effectuer cette réduction, on retranchera de $x$ le plus grand multiple positif ou négatif de la circonférence, qu'il peut contenir, de manière que le reste positif ou négatif $\pm\alpha$ soit en valeur absolue moindre que $\pi$; on aura

$$x = 2k\pi \pm \alpha,$$

et l'arc $\alpha$ a, en faisant abstraction des signes, les mêmes lignes trigonométriques que $x$. Si $\alpha$ est $< \frac{\pi}{2}$, le problème est résolu, sinon on prendra son supplément $\pi - \alpha$, et ce supplément, moindre que $\frac{\pi}{2}$, a, au signe près, les mêmes lignes trigonométriques que $x$.

### *Expressions des arcs qui correspondent à une ligne trigonométrique donnée.*

**24.** Il résulte des développements qui précèdent, qu'à chaque valeur de l'arc de $-\infty$ à $+\infty$ correspond une valeur unique bien déterminée pour chacune de ses lignes trigonométriques, tandis qu'à une même valeur donnée de l'une des lignes trigonométriques correspondent une infi-

nité de valeurs de l'arc; nous allons résoudre la question suivante :

*Connaissant l'un des arcs qui correspondent à une ligne trigonométrique donnée, déterminer tous les autres.*

**25.** *Expression des arcs qui ont un sinus donné* A.

A étant l'origine des arcs (*fig.* 3), menons les diamètres AA' et BB' perpendiculaires entre eux. Supposons d'abord le nombre donné A positif; prenons sur OB une longueur $OQ = A$, et menons par le point Q, MM' parallèle à AA', les arcs ayant A pour sinus ont nécessairement leur extrémité en M ou en M'. Désignons par $\alpha$ l'arc AM qui est compris entre o et $\frac{\pi}{2}$, tous les arcs qui ont cette même extrémité sont compris dans la formule $2k\pi + \alpha$, où $k$ est un nombre entier (n° 7). En outre, comme l'arc AMM' compris entre $\frac{\pi}{2}$ et $\pi$ est égal à $\pi - \alpha$, tous les arcs qui ont leur extrémité en M' sont compris dans la formule $2k\pi + (\pi - \alpha)$ ou $(2k+1)\pi - \alpha$. Il résulte de là que

*Toutes les valeurs de $x$ pour lesquelles on a $\sin x = A$, sont comprises dans l'une ou l'autre des deux formules*

$$x = 2k\pi + \alpha, \quad x = (2k+1)\pi - \alpha,$$

*où $k$ désigne un nombre entier indéterminé positif, nul ou négatif, et $\alpha$ le plus petit arc positif qui a* A *pour sinus.*

On arrive à la même conclusion si A est négatif. Dans ce cas, en effet, on prendra sur OB' une longueur $OQ' = -A$, et on mènera, par le point Q', M''M''' parallèle à OA. En désignant par $\alpha$ l'arc AMM'M'' compris entre $\pi$ et $\frac{3\pi}{2}$, on voit que l'arc AMM'M''M''' compris entre $\frac{3\pi}{2}$ et $2\pi$, est

égal à $3\pi - \alpha$; donc les arcs terminés en M″ et en M‴ sont respectivement compris dans les formules

$$2k\pi + \alpha, \quad 2k\pi + 3\pi - \alpha \quad \text{ou} \quad (2k+1)\pi - \alpha,$$

comme dans le cas de A positif.

On tire de là une conséquence importante. Si $x$ et $a$ sont deux arcs ayant même sinus A, et que ces deux arcs soient compris dans la même formule, on a

$$\begin{cases} x = 2k\pi + \alpha, \\ a = 2k'\pi + \alpha, \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = (2k+1)\pi - \alpha, \\ a = (2k'+1)\pi - \alpha, \end{cases}$$

et l'on voit que la différence $x - a$ est égale à un nombre entier de circonférences. Si au contraire $x$ et $a$ appartiennent à des formules différentes, on a

$$\begin{cases} x = 2k\pi + \alpha, \\ a = (2k'+1)\pi - \alpha, \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = (2k+1)\pi - \alpha, \\ a = 2k'\pi + \alpha, \end{cases}$$

et alors la somme $x + a$ est égale à un nombre impair de demi-circonférences. En rapprochant ce résultat de ceux obtenus aux n$^{os}$ **10** et **11**, on peut énoncer la proposition suivante :

*Pour que deux arcs aient le même sinus il faut et il suffit, ou que leur somme soit égale à un nombre impair de demi-circonférences, ou que leur différence soit égale à un nombre pair de demi-circonférences.*

*Remarque.* — On peut encore énoncer ce résultat en disant que l'équation

$$\sin x = \sin a,$$

a une infinité de racines données par les formules

$$x = 2k\pi + a, \quad x = (2k+1)\pi - a,$$

où $k$ désigne un entier indéterminé.

26. *Expression des arcs qui ont un cosinus donné* A.

Soient $x$ et $\alpha$ deux arcs qui ont le cosinus donné; les compléments $\frac{\pi}{2} - x$ et $\frac{\pi}{2} - \alpha$ ayant même sinus, leur somme est égale à un nombre impair, ou leur différence à un nombre pair de demi-circonférences; et, par conséquent,

$$x = 2k\pi \pm \alpha.$$

27. *Expression des arcs qui ont une tangente donnée* A.

Ayant mené par le point A la tangente $yy'$, prenons sur A$y$ une distance AT = A si A est positif, ou sur A$y'$ une distance AT' = — A si A est négatif, et menons le diamètre OT ou OT'; les points M et M'' ou M' et M''', où ce diamètre coupe la circonférence, sont les extrémités des arcs qui ont A pour tangente. En désignant par $\alpha$ le plus petit arc positif terminé en M ou en M', celui qui est terminé en M'' ou en M''' est $\pi + \alpha$; donc

*Les arcs qui ont* A *pour tangente sont compris dans les formules*

$$2k\pi + \alpha, \quad (2k+1)\pi + \alpha,$$

*dont l'ensemble équivaut à la formule unique*

$$k\pi + \alpha,$$

*où k désigne, comme précédemment, un entier positif, nul ou négatif, et* $\alpha$ *le plus petit des arcs positifs qui ont* A *pour tangente.*

Si $x$ et $a$ désignent deux arcs ayant même tangente A, on a

$$x = k\pi + \alpha, \quad a = k'\pi + \alpha;$$

de là et de ce qui a été dit au n° 15 résulte cette proposition :

*Pour que deux arcs aient même tangente, il faut et il*

*suffit que la différence de ces arcs soit un multiple de la demi-circonférence.*

*Remarque.* — On peut dire aussi que l'équation

$$\tang x = \tang a,$$

où $a$ désigne un arc donné, a une infinité de racines, données par la formule

$$x = k\pi + a,$$

dans laquelle $k$ est un nombre entier indéterminé.

**28.** *Expression des arcs qui ont une cotangente donnée* A.

Soient $x$ et $\alpha$ deux arcs qui ont la cotangente donnée; les compléments $\frac{\pi}{2} - x$ et $\frac{\pi}{2} - \alpha$ ayant même tangente, leur différence est égale à un nombre entier de demi-circonférences; et, par conséquent,

$$x = k\pi + \alpha.$$

**29.** *Expression des arcs qui ont une sécante donnée* A.

Prenons sur OA (*fig.* 3) une distance OK = A si A est positif, ou sur OA′ une distance OK′ = — A si A est négatif, et menons par le point K ou K′ deux tangentes à la circonférence; les points de contact M et M‴ ou M′ et M″ sont les extrémités des arcs qui ont la sécante donnée A. En appelant $\alpha$ le plus petit arc positif terminé en M ou en M′, celui qui est terminé en M‴ ou en M″ est $2\pi - \alpha$, d'où l'on déduit immédiatement que

*Les arcs qui ont* A *pour sécante sont compris dans l'une des formules*

$$2k\pi + \alpha, \quad 2k\pi - \alpha,$$

*c'est-à-dire dans la formule*

$$2k\pi \pm \alpha,$$

*où k désigne toujours un entier indéterminé et α le plus petit arc positif ayant* A *pour sécante.*

On voit aussi que

*Pour que deux arcs aient même sécante, il faut et il suffit que leur somme ou leur différence soit un multiple de la circonférence.*

30. *Expression des arcs qui ont une cosécante donnée* A.

Soient $x$ et $\alpha$ deux arcs qui ont la cosécante donnée; les compléments $\frac{\pi}{2} - x$ et $\frac{\pi}{2} - \alpha$ ayant même sécante, leur somme ou leur différence est un multiple de la demi-circonférence; par conséquent

$$x = 2k\pi + \alpha, \quad \text{ou} \quad x = (2k+1)\pi - \alpha.$$

*Des fonctions circulaires inverses.*

31. Si l'on pose

$$y = \sin x, \text{ ou } y = \operatorname{tang} x, \quad \text{ou} \quad y = \operatorname{séc} x, \text{ ou, etc.},$$

on a coutume d'écrire aussi

$$x = \operatorname{arc} \sin y, \text{ ou } x = \operatorname{arc} \operatorname{tang} y, \text{ ou } x = \operatorname{arc} \operatorname{séc} y, \text{ ou, etc.}$$

c'est-à-dire, $x =$ l'arc dont le sinus est $y$; $x =$ l'arc dont la tangente est $y$, etc.

Et il est évident que l'on peut considérer $x$ comme une fonction de $\sin x$, ou de $\operatorname{tang} x$, ou de $\operatorname{séc} x$, etc. Seulement cette fonction n'est pas complétement déterminée; arc $\sin y$, par exemple, admet une infinité de valeurs pour une même valeur de $y$; mais elle devient déterminée, si l'on spécifie que l'arc $x$ ne varie que de $-\frac{\pi}{2}$ à $+\frac{\pi}{2}$.

Les six fonctions arc sin $y$, arc cos $y$, etc., sont souvent employées dans les parties élevées des mathématiques. On leur a donné le nom de *fonctions circulaires inverses*.

*Relations entre les lignes trigonométriques d'un même arc.*

**32.** Il existe entre les six lignes trigonométriques d'un même arc, cinq relations distinctes que nous allons établir.

Soit A l'origine des arcs (*fig.* 3), et désignons par $x$ un arc positif ou négatif dont l'extrémité M est située dans le premier quadrant AB : menons le rayon OM, et abaissons MP perpendiculaire sur OA et MQ sur OB ; enfin, menons par les points A, B et M les tangentes AT, BS et KH, on aura

$$OM = 1,$$

$$\sin x = MP,\quad \operatorname{tang} x = AT,\quad \operatorname{séc} x = OK,$$

$$\cos x = OP,\quad \cot x = BS,\quad \operatorname{coséc} x = OH.$$

Cela posé, le triangle OMP donne

$$\overline{MP}^2 + \overline{OP}^2 = \overline{OM}^2;$$

les triangles rectangles MOK et MOH donnent aussi

$$OK.OP = \overline{OM}^2,$$

$$OH.OQ = \overline{OM}^2;$$

enfin les triangles semblables TOA et MOP, BOS et MOQ donnent les proportions

$$\frac{TA}{OA} = \frac{MP}{OP},$$

$$\frac{SB}{OB} = \frac{MQ}{OQ}.$$

Ces cinq égalités peuvent s'écrire de la manière suivante :

(1) $$\sin^2 x + \cos^2 x = 1,$$

(2) $$\text{séc}\, x . \cos x = 1,$$

(3) $$\text{coséc}\, x . \sin x = 1,$$

(4) $$\text{tang}\, x = \frac{\sin x}{\cos x},$$

(5) $$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}.$$

Telles sont les relations que nous voulions obtenir; on peut en déduire plusieurs autres qu'il importe de remarquer. Ainsi, on tire des équations (4) et (5), par la division,

(6) $$\cot x = \frac{1}{\text{tang}\, x};$$

les équations (2) et (3) donnent aussi

(7) $$\text{séc}\, x = \frac{1}{\cos x},$$

(8) $$\text{coséc}\, x = \frac{1}{\sin x};$$

ce qui montre que $\cot x$, $\text{séc}\, x$ et $\text{coséc}\, x$ sont respectivement les inverses de $\text{tang}\, x$, $\cos x$ et $\sin x$.

Des équations (4) et (5) on déduit

$$1 + \text{tang}^2 x = 1 + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x},$$

$$1 + \cot^2 x = 1 + \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \frac{1}{\sin^2 x};$$

ou, à cause des relations (7) et (8),

(9) $$\text{séc}^2 x = 1 + \text{tang}^2 x,$$

(10) $$\text{coséc}^2 x = 1 + \cot^2 x.$$

Ces deux dernières peuvent se déduire immédiatement de la *fig.* 3. Les triangles rectangles OTA et OSB donnent, en effet,

$$\overline{OT}^2 = \overline{OK}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{AT}^2,$$
$$\overline{OS}^2 = \overline{OH}^2 = \overline{OB}^2 + \overline{BS}^2,$$

relations qui ne sont autres que (9) et (10).

33. Pour établir les formules (1), (2), (3), (4) et (5), nous avons supposé l'extrémité de l'arc $x$ située dans le premier quadrant; mais il est aisé de voir que ces formules sont générales. En effet, quelle que soit la position de l'extrémité M sur la circonférence, il existe (nº 23) un arc compris entre o et $\frac{\pi}{2}$, et qui, abstraction faite des signes, a les mêmes lignes trigonométriques que $x$; d'où il suit que si l'on n'a égard qu'aux valeurs absolues des lignes trigonométriques, les relations (1), (2), (3), (4) et (5) auront toujours lieu. La relation (1), qui ne contient que les carrés de $\sin x$ et de $\cos x$, sera donc vraie dans tous les cas, et il suffit de constater que, quel que soit $x$, les deux membres de chacune des relations (2), (3), (4) et (5) ont le même signe. Or on a vu :

1°. Que $\cos x$ et $\text{séc}\, x$ sont tous deux positifs si l'extrémité de l'arc $x$ est située dans le premier ou le quatrième quadrant, et qu'ils sont négatifs dans les deux autres cas;

2°. Que $\sin x$ et $\text{coséc}\, x$ sont positifs si l'extrémité de l'arc $x$ est située dans le premier ou dans le deuxième quadrant, et qu'ils sont négatifs dans les deux autres cas;

3°. Que $\text{tang}\, x$ et $\cot x$ sont positives si l'extrémité de l'arc $x$ est dans le premier ou dans le troisième quadrant, auquel cas $\sin x$ et $\cos x$ sont de même signe; tandis qu'elles sont négatives si l'extrémité de l'arc $x$ est dans le second ou dans le quatrième quadrant, auquel cas $\sin x$ et $\cos x$ ont des signes contraires.

On conclut de là, et de la règle donnée en algèbre pour la multiplication des nombres positifs et négatifs, que les deux membres de chacune des relations (2), (3), (4), (5) sont toujours des nombres de même signe. Par conséquent ces formules sont vraies quel que soit $x$.

34. Des relations (1), (2), (3), (4), (5), on peut tirer les valeurs de cinq quelconques des six lignes trigonométriques *en fonction* de la sixième; on a, par exemple,

$$\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x}, \qquad \operatorname{tang} x = \frac{\sin x}{\pm\sqrt{1-\sin^2 x}},$$

$$\cot x = \frac{\pm\sqrt{1-\sin^2 x}}{\sin x}, \qquad \operatorname{séc} x = \frac{1}{\pm\sqrt{1-\sin^2 x}},$$

$$\operatorname{coséc} x = \frac{1}{\sin x}.$$

Remarquons toutefois que lorsqu'on connaît une ligne trigonométrique d'un arc $x$, les autres lignes ne sont pas toutes déterminées entièrement; ainsi, quand on donne $\sin x$, $\operatorname{coséc} x$ est déterminée, mais on ne connaît que les valeurs absolues des quatre autres lignes. Cela résulte de ce que parmi les arcs dont le sinus est donné, il y en a dont les cosinus, tangente, cotangente et sécante sont positifs, et d'autres pour lesquelles les mêmes lignes sont négatives.

On a souvent besoin de connaître $\sin x$ et $\cos x$ quand on donne $\operatorname{tang} x$; supposons que la valeur donnée de $\operatorname{tang} x$ ait la forme fractionnaire $\frac{m}{n}$, on aura

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \qquad \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{m}{n},$$

d'où l'on tire

$$\sin x = \frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}}, \qquad \cos x = \frac{n}{\sqrt{m^2+n^2}};$$

dans ces deux formules, le radical $\sqrt{m^2 + n^2}$ doit être pris avec le même signe, mais ce signe est indéterminé.

35. On peut démontrer qu'il ne saurait exister entre les lignes trigonométriques de relations distinctes de celles que nous avons trouvées. Supposons, en effet, qu'il en existe une, et remplaçons-y $\cos x$, $\tang x$, $\cot x$, $\text{séc}\, x$ et $\text{coséc}\, x$ par leurs valeurs en fonction de $\sin x$, déduites des relations (1), (2), (3), (4), (5), on aura une relation non identique à laquelle devra satisfaire $\sin x$ : or cela est impossible, puisque $\sin x$ est un nombre arbitraire.

# LIVRE DEUXIÈME.

## ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE DES FONCTIONS CIRCULAIRES.

### PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES.

Formules relatives à l'addition des arcs. — Formules importantes déduites de celles relatives à l'addition des arcs. — Applications des formules précédentes. — Formules relatives à la multiplication des arcs. — De la division des arcs. — Détermination des sinus et cosinus de certains arcs.

---

*Formules relatives à l'addition des arcs.*

36. *Sinus et cosinus.* — Nous allons montrer comment on peut obtenir le sinus et le cosinus de la somme ou de la différence de deux arcs, quand on connaît les sinus et cosinus de ces arcs.

Soient $a$ et $b$ deux arcs positifs dont le premier n'est pas moindre que le second, et dont la somme ne surpasse pas $\frac{\pi}{2}$.

Soit A (*fig.* 4) l'origine des arcs, prenons $AM = a$, et $MN = ML = b$; on peut considérer l'arc $b$ comme ayant M pour origine et N pour extrémité, et l'on a

$$a + b = AN, \quad a - b = AL;$$

joignons NL qui est perpendiculaire en Q sur le rayon OM, abaissons NR, QI, MP et LS perpendiculaires sur OA, menons enfin QH et LK parallèles à OA, on aura

$$\sin a = MP, \quad \cos a = OP,$$
$$\sin b = NQ, \quad \cos b = OQ,$$

et, en remarquant que les triangles NQH et LQK sont égaux comme ayant un côté égal, $NQ = QL$, adjacent à

deux angles égaux chacun à chacun, on aura aussi

$$\sin(a+b) = NR = QI + NH,$$
$$\cos(a+b) = OR = OI - QH,$$
$$\sin(a-b) = LS = QI - NH,$$
$$\cos(a-b) = OS = OI + QH.$$

Cela posé, les triangles semblables MPO et QIO donnent les proportions

$$\frac{QI}{MP} = \frac{OI}{OP} = \frac{OQ}{OM},$$

d'où l'on tire

$$QI = \frac{MP.OQ}{OM} = \sin a \cos b,$$

$$OI = \frac{OP.OQ}{OM} = \cos a \cos b.$$

Les triangles MPO et NQH sont aussi semblables, car ils ont les côtés perpendiculaires chacun à chacun; on a donc les proportions

$$\frac{NH}{OP} = \frac{QH}{MP} = \frac{NQ}{OM},$$

d'où l'on tire

$$NH = \frac{OP.NQ}{OM} = \cos a \sin b,$$

$$QH = \frac{MP.NQ}{OM} = \sin a \sin b.$$

Connaissant ainsi les valeurs de QI, OI, NH et QH, on a

(1) $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b,$

(2) $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b,$

(3) $\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b,$

(4) $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b.$

37. Ces formules (1), (2), (3), (4), n'ont été démontrées que dans l'hypothèse où $a$ et $b$ sont deux arcs positifs dont

la somme n'est pas supérieure à $\frac{\pi}{2}$; on doit même supposer, dans les formules (3) et (4), que $a$ n'est pas inférieur à $b$, restriction à laquelle ne sont pas soumises les formules (1) et (2) à cause de la symétrie. Nous allons prouver que ces quatre formules sont générales; la démonstration sera composée de quatre parties.

1°. *Les formules* (1) *et* (2) *sont vraies pour toutes les valeurs de* $a$ *et de* $b$ *comprises entre* 0 *et* $\frac{\pi}{2}$.

Cette proposition étant démontrée dans le cas de $a+b<\frac{\pi}{2}$, supposons $a+b>\frac{\pi}{2}$, et soient $a'$ et $b'$ les compléments de $a$ et de $b$; on aura $a'+b'<\frac{\pi}{2}$, par conséquent,

$$\sin(a'+b') = \sin a' \cos b' + \cos a' \sin b',$$
$$\cos(a'+b') = \cos a' \cos b' - \sin a' \sin b'.$$

En remplaçant $a'$ et $b'$ par leurs valeurs $\frac{\pi}{2}-a$ et $\frac{\pi}{2}-b$, se rappelant, en outre, que deux arcs supplémentaires ont des sinus égaux et des cosinus égaux et de signes contraires, les formules précédentes deviennent

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b,$$
$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b;$$

ce sont précisément les formules (1) et (2).

2°. *Si les formules* (1) *et* (2) *sont vraies pour deux arcs* $a$ *et* $b$, *elles seront vraies encore, si l'on ajoute à l'un des arcs ou à tous deux le quadrant* $\frac{\pi}{2}$ *ou un multiple quelconque de* $\frac{\pi}{2}$.

On a, par hypothèse,

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b,$$
$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$$

Soit $a' = a + \frac{\pi}{2}$, et remplaçons $a$ par $a' - \frac{\pi}{2}$, il vient

$$\sin\left(a' + b - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(a' - \frac{\pi}{2}\right)\cos b + \cos\left(a' - \frac{\pi}{2}\right)\sin b,$$
$$\cos\left(a' + b - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(a' - \frac{\pi}{2}\right)\cos b - \sin\left(a' - \frac{\pi}{2}\right)\sin b;$$

or, on a, quel que soit $x$,

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos x,$$
$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x;$$

donc les formules précédentes deviennent

$$\cos(a' + b) = \cos a' \cos b - \sin a' \sin b,$$
$$\sin(a' + b) = \sin a' \cos b + \cos a' \sin b,$$

et l'on voit que ce sont précisément les formules (1) et (2) où l'on a mis $a'$ ou $a + \frac{\pi}{2}$ à la place de $a$.

Si donc les formules (1) et (2) sont vraies pour deux arcs $a$ et $b$, elles le seront encore quand on aura ajouté à l'un de ces arcs $\frac{\pi}{2}$, et, par suite, un multiple quelconque de $\frac{\pi}{2}$; il est évident qu'il en sera de même si l'on ajoute aussi au deuxième arc un multiple quelconque de $\frac{\pi}{2}$.

On peut conclure de là que les formules (1) et (2) sont vraies pour toutes les valeurs positives de $a$ et de $b$.

Supposons, en effet, que les arcs $a$ et $b$ contiennent respectivement le premier $m$, le deuxième $n$ quadrants, et posons

$$a = m\frac{\pi}{2} + a', \quad b = n\frac{\pi}{2} + b';$$

$a'$ et $b'$ étant chacun moindres qu'un quadrant, les for-

mules (1) et (2) seront vraies quand on aura remplacé $a$ et $b$ par $a'$ et $b'$ respectivement; donc, d'après ce qui précède, elles le sont pour les valeurs $m\frac{\pi}{2}+a'$, $n\frac{\pi}{2}+b'$ de $a$ et de $b$.

3°. *Les formules (1) et (2) sont vraies pour des valeurs quelconques de a et de b, l'une positive, l'autre négative.*

Supposant $a$ positif et $b$ négatif, désignons par $k$ un nombre entier positif tel, que $2k\pi$ soit plus grand que la valeur absolue de $b$; $2k\pi+b$ étant positif, on aura

$$\sin(a+2k\pi+b)=\sin a\cos(2k\pi+b)+\cos a\sin(2k\pi+b),$$
$$\cos(a+2k\pi+b)=\cos a\cos(2k\pi+b)-\sin a\sin(2k\pi+b).$$

Mais on a, quel que soit $x$ (nos 10 et 21),

$$\sin(2k\pi+x)=\sin x,\quad \cos(2k\pi+x)=\cos x;$$

donc il vient

$$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b,$$
$$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b.$$

Ce sont les formules (1) et (2).

4°. *Les formules (1) et (2) sont vraies pour des valeurs négatives quelconques de a et de b.*

Soient

$$a=-a',\quad b=-b';$$

$a'$ et $b'$ étant positifs, on aura

$$\sin(a'+b')=\sin a'\cos b'+\cos a'\sin b',$$
$$\cos(a'+b')=\cos a'\cos b'-\sin a'\sin b'.$$

En mettant $-a$ et $-b$ au lieu de $a'$ et $b'$, et se rappelant que

$$\sin(-x)=-\sin x,\quad \cos(-x)=\cos x,$$

il vient

$$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\cos a\sin b,$$
$$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b.$$

La généralité des formules (1) et (2) est donc complétement établie.

Les formules (3) et (4) se déduisent des formules (1) et (2) en changeant $b$ en $-b$; donc elles sont vraies pour toutes les valeurs de $a$ et de $b$.

**38.** *Remarque.* — Non-seulement les formules (3) et (4) sont comprises dans les formules (1) et (2); mais encore, chacune des formules (1) et (2) est comprise dans l'autre. Prenons, en effet, la formule (1),

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b,$$

qui est vraie pour deux arcs quelconques, et mettons-y $\frac{\pi}{2} - a$ au lieu de $a$, $-b$ au lieu de $b$; il vient

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b.$$

C'est précisément la formule (2). Réciproquement, on peut déduire la formule (1) de la formule (2). Ainsi, les quatre formules (1), (2), (3) (4) se réduisent au fond à une seule, mais il est souvent avantageux de les considérer toutes les quatre.

**39.** On peut facilement trouver les sinus et cosinus d'une somme d'un nombre quelconque d'arcs, quand on connaît les sinus et cosinus de chacun d'eux. Soient, par exemple, $a$, $b$, $c$ trois arcs quelconques; on a

$$\sin(a+b+c) = \sin(a+b)\cos c + \cos(a+b)\sin c,$$
$$\cos(a+b+c) = \cos(a+b)\cos c - \sin(a+b)\sin c.$$

En remplaçant $\sin(a+b)$ et $\cos(a+b)$ par leurs valeurs, il vient

$$\sin(a+b+c) = \sin a \cos b \cos c + \sin b \cos a \cos c + \sin c \cos a \cos b - \sin a \sin b \sin c,$$

$$\cos(a+b+c) = \cos a \cos b \cos c - \cos a \sin b \sin c - \cos b \sin a \sin c - \cos c \sin a \sin b.$$

Connaissant ainsi les formules qui donnent les sinus et cosinus d'une somme de trois arcs, on pourra obtenir celles qui donnent les sinus et cosinus d'une somme de quatre, puis de cinq, et ainsi de suite.

40. *Tangentes et cotangentes.* — Proposons-nous maintenant de trouver la tangente ou la cotangente de la somme de deux arcs, connaissant les tangentes ou les cotangentes de ces arcs.

Soient $a$ et $b$ deux arcs quelconques positifs ou négatifs; on a

$$\operatorname{tang}(a+b)=\frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}=\frac{\sin a\cos b+\cos a\sin b}{\cos a\cos b-\sin a\sin b},$$

et, en divisant les deux termes de cette valeur de $\operatorname{tang}(a+b)$ par $\cos a\cos b$, il vient

$$(5)\qquad \operatorname{tang}(a+b)=\frac{\operatorname{tang} a+\operatorname{tang} b}{1-\operatorname{tang} a\operatorname{tang} b}.$$

Si l'on change $b$ en $-b$ dans cette formule, on a

$$(6)\qquad \operatorname{tang}(a-b)=\frac{\operatorname{tang} a-\operatorname{tang} b}{1+\operatorname{tang} a\operatorname{tang} b}.$$

Pour avoir $\cot(a+b)$ exprimée en fonction de $\cot a$ et $\cot b$, on écrira

$$\cot(a+b)=\frac{\cos(a+b)}{\sin(a+b)}=\frac{\cos a\cos b-\sin a\sin b}{\sin a\cos b+\cos a\sin b},$$

et, en divisant haut et bas par $\sin a\ \sin b$, il vient

$$\cot(a+b)=\frac{\cot a\cot b-1}{\cot a+\cot b}.$$

41. *Remarque.* — Il est très-important de remarquer que $\operatorname{tang}(a+b)$ peut s'exprimer *rationnellement* en fonction de $\operatorname{tang} a$ et de $\operatorname{tang} b$, tandis qu'il est impossible d'exprimer rationnellement $\sin(a+b)$ en fonction de $\sin a$ et

de $\sin b$, ou $\cos(a+b)$ en fonction de $\cos a$ et $\cos b$. Si, en effet, dans l'expression de $\sin(a+b)$, on remplace $\cos a$ et $\cos b$ par leurs valeurs $\sqrt{1-\sin^2 a}$, $\sqrt{1-\sin^2 b}$, cette expression contiendra des radicaux; la même chose a lieu quand on remplace dans l'expression de $\cos(a+b)$, $\sin a$ et $\sin b$ par $\sqrt{1-\cos^2 a}$, $\sqrt{1-\cos^2 b}$, excepté dans le cas particulier où $b=a$.

42. On peut exprimer la tangente d'une somme d'un nombre quelconque d'arcs, en fonction rationnelle des tangentes de ces arcs. Soient, par exemple, $a$, $b$, $c$ trois arcs quelconques; on aura

$$\operatorname{tang}(a+b+c)=\frac{\operatorname{tang}(a+b)+\operatorname{tang} c}{1-\operatorname{tang}(a+b)\operatorname{tang} c},$$

et, en remplaçant $\operatorname{tang}(a+b)$ par sa valeur $\frac{\operatorname{tang} a+\operatorname{tang} b}{1-\operatorname{tang} a \operatorname{tang} b}$, il vient

$$\operatorname{tang}(a+b+c)=\frac{\operatorname{tang} a+\operatorname{tang} b+\operatorname{tang} c-\operatorname{tang} a \operatorname{tang} b \operatorname{tang} c}{1-\operatorname{tang} a \operatorname{tang} b-\operatorname{tang} a \operatorname{tang} c-\operatorname{tang} b \operatorname{tang} c}.$$

En général, si l'on a $m$ arcs $a, b, c, \ldots, l$, et que l'on désigne par $S_1$ la somme de leurs tangentes, par $S_2$ la somme des produits deux à deux de ces tangentes, par $S_3$ la somme de leurs produits trois à trois, etc., et enfin par $S_m$ le produit de toutes les tangentes, on aura

$$\operatorname{tang}(a+b+c+\ldots+l)=\frac{S_1-S_3+S_5-\ldots}{1-S_2+S_4-\ldots}.$$

Nous nous bornons à mentionner cette formule remarquable, le lecteur en trouvera aisément la démonstration.

43. Nous n'avons rien à dire au sujet des sécantes et cosécantes dont l'usage est peu fréquent. On trouverait facilement les valeurs de $\operatorname{séc}(a+b)$ et de $\operatorname{coséc}(a+b)$, puisque ce sont les inverses de $\sin(a+b)$ et $\cos(a+b)$.

### *Formules importantes déduites de celles relatives à l'addition des arcs.*

**44.** Des formules

$$\begin{aligned}\sin(a+b) &= \sin a\cos b + \cos a\sin b,\\ \cos(a+b) &= \cos a\cos b - \sin a\sin b,\\ \sin(a-b) &= \sin a\cos b - \cos a\sin b,\\ \cos(a-b) &= \cos a\cos b + \sin a\sin b,\end{aligned}$$

on déduit, par addition et soustraction,

$$(1)\quad \begin{cases}\sin(a+b) + \sin(a-b) = 2\sin a\cos b,\\ \sin(a+b) - \sin(a-b) = 2\cos a\sin b,\\ \cos(a+b) + \cos(a-b) = 2\cos a\cos b,\\ \cos(a-b) - \cos(a+b) = 2\sin a\sin b.\end{cases}$$

Soient maintenant

$$a+b=p,\quad a-b=q;$$

on aura

$$a=\frac{1}{2}(p+q),\quad b=\frac{1}{2}(p-q),$$

et les formules précédentes deviennent

$$(2)\quad \begin{cases}\sin p + \sin q = 2\sin\frac{1}{2}(p+q)\cos\frac{1}{2}(p-q),\\ \sin p - \sin q = 2\sin\frac{1}{2}(p-q)\cos\frac{1}{2}(p+q),\\ \cos p + \cos q = 2\cos\frac{1}{2}(p+q)\cos\frac{1}{2}(p-q),\\ \cos q - \cos p = 2\sin\frac{1}{2}(p+q)\sin\frac{1}{2}(p-q).\end{cases}$$

Ces formules (2), d'un usage fréquent, servent à exprimer la somme ou la différence de deux sinus ou de deux cosinus par un produit de sinus et cosinus.

On peut de même exprimer par un produit la somme ou la différence d'un sinus et d'un cosinus, car on a

$$\cos p \pm \sin q = \sin\left(\frac{\pi}{2} - p\right) \pm \sin q,$$

et, en faisant usage des formules (2),

$$(3)\begin{cases}\cos p + \sin q = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{p+q}{2}\right),\\ \cos p - \sin q = 2\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{p-q}{2}\right).\end{cases}$$

En divisant deux à deux les formules (2), on obtient les suivantes, qu'il est important de se rappeler :

$$(4)\begin{cases}\frac{\sin p + \sin q}{\sin p - \sin q} = \frac{\sin\frac{1}{2}(p+q)\cos\frac{1}{2}(p-q)}{\sin\frac{1}{2}(p-q)\cos\frac{1}{2}(p+q)} = \frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(p+q)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(p-q)},\\ \frac{\sin p + \sin q}{\cos p + \cos q} = \frac{\sin\frac{1}{2}(p+q)}{\cos\frac{1}{2}(p+q)} = \operatorname{tang}\frac{1}{2}(p+q),\\ \frac{\sin p + \sin q}{\cos q - \cos p} = \frac{\cos\frac{1}{2}(p-q)}{\sin\frac{1}{2}(p-q)} = \cot\frac{1}{2}(p-q),\\ \frac{\sin p - \sin q}{\cos p + \cos q} = \frac{\sin\frac{1}{2}(p-q)}{\cos\frac{1}{2}(p-q)} = \operatorname{tang}\frac{1}{2}(p-q),\\ \frac{\sin p - \sin q}{\cos q - \cos p} = \frac{\cos\frac{1}{2}(p+q)}{\sin\frac{1}{2}(p+q)} = \cot\frac{1}{2}(p+q),\\ \frac{\cos p + \cos q}{\cos q - \cos p} = \frac{\cos\frac{1}{2}(p+q)\cos\frac{1}{2}(p-q)}{\sin\frac{1}{2}(p+q)\sin\frac{1}{2}(p-q)} = \cot\frac{1}{2}(p+q)\cot\frac{1}{2}(p-q).\end{cases}$$

**45.** On peut aussi transformer la somme ou la différence de deux tangentes en un produit de lignes trigonométriques. On a, en effet,

$$\operatorname{tang} a \pm \operatorname{tang} b = \frac{\sin a}{\cos a} \pm \frac{\sin b}{\cos b} = \frac{\sin a\cos b \pm \cos a\sin b}{\cos a\cos b},$$

ou

$$(5)\qquad \operatorname{tang} a \pm \operatorname{tang} b = \frac{\sin(a \pm b)}{\cos a\cos b};$$

on aurait de même

$$\cot a \pm \cot b = \frac{\sin(b \pm a)}{\cos a\cos b}.$$

$$\cot a \pm \operatorname{tang} b = \frac{\cos(a \pm b)}{\sin a\cos b}.$$

Voici encore une formule qu'il est bon de remarquer. Multiplions entre elles les deux égalités

$$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b,$$
$$\sin(a-b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b;$$

il vient

$$\begin{aligned}\sin(a+b)\sin(a-b) &= \sin^2 a \cos^2 b - \cos^2 a \sin^2 b,\\ &= (1-\sin^2 b)\sin^2 a - (1-\sin^2 a)\sin^2 b,\\ &= (1-\cos^2 a)\cos^2 b - (1-\cos^2 b)\cos^2 a,\end{aligned}$$

ou

(6) $$\begin{aligned}\sin(a+b)\sin(a-b) &= \sin^2 a - \sin^2 b,\\ &= \cos^2 b - \cos^2 a.\end{aligned}$$

### *Applications des formules précédentes.*

**46.** Nous allons faire l'application des formules précédentes à la solution de quelques problèmes.

Problème I. — *Trouver le côté du polygone régulier de quinze côtés, inscrit dans le cercle dont le rayon est l'unité.*

Appelons $x$ le côté cherché; on a (n° **12**)

$$x = 2\sin\frac{\pi}{15}.$$

Or, $\frac{1}{15} = \frac{1}{6} - \frac{1}{10}$; donc

$$x = 2\sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{10}\right) = 2\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{10} - 2\sin\frac{\pi}{10}\cos\frac{\pi}{6}.$$

On a trouvé (n° **12**)

$$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \quad \sin\frac{\pi}{10} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4},$$

et l'on en déduit

$$\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad \cos\frac{\pi}{10} = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4};$$

on a donc

$$x = \frac{1}{4}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}} - \frac{1}{4}\sqrt{3}(-1 + \sqrt{5}).$$

47. Problème II. — *Démontrer que si $a$, $b$, $c$ sont trois arcs dont la somme est égale à $\pi$, on a*

$$\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c = 1.$$

De la relation

$$a + b = \pi - c$$

on tire

$$\cos(a + b) = -\cos c,$$

ou

$$\cos a \cos b + \cos c = \sin a \sin b;$$

élevant au carré, il vient

$$\begin{aligned}\cos^2 a \cos^2 b + 2\cos a \cos b \cos c + \cos^2 c &= \sin^2 a \sin^2 b \\ &= (1 - \cos^2 a)(1 - \cos^2 b),\end{aligned}$$

ou, en faisant les réductions,

$$\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c = 1,$$

ce qu'il fallait démontrer.

*Remarque.* — On pourrait, pour vérifier la relation indiquée, y remplacer $c$ par sa valeur $\pi - a - b$, et démontrer ensuite qu'elle devient par là identique. En général, pour vérifier une relation $V = 0$ entre les lignes trigonométriques de $m$ arcs liés entre eux par $m - n$ équations, on tirera de ces équations les valeurs de $m - n$ arcs en fonction des $n$ autres, et on les substituera dans l'équation $V = 0$ qui deviendra alors identique. On rendra l'identité manifeste en exprimant toutes les lignes trigonométriques de chaque arc en fonction de l'une quelconque d'entre elles.

48. Problème III. — *Trouver la relation qui existe entre trois arcs dont les cosinus sont liés par la relation*

$$\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c = 1.$$

Cette relation peut s'écrire ainsi :

$$(\cos a + \cos b \cos c)^2 - \cos^2 b \cos^2 c + \cos^2 b + \cos^2 c = 1,$$

ou

$$(\cos a + \cos b \cos c)^2 = 1 - \cos^2 b - \cos^2 c + \cos^2 b \cos^2 c$$
$$= (1 - \cos^2 b)(1 - \cos^2 c) = \sin^2 b \sin^2 c,$$

ou

$$(\cos a + \cos b \cos c)^2 - \sin^2 b \sin^2 c = 0.$$

Le premier membre est la différence de deux carrés ; on peut donc le décomposer en facteurs, et l'on a ainsi :

$$(\cos a + \cos b \cos c - \sin b \sin c)(\cos a + \cos b \cos c + \sin b \sin c) = 0,$$

ou

$$[\cos a + \cos(b + c)][\cos a + \cos(b - c)] = 0.$$

Enfin, en faisant usage des formules du n° **44**, il vient

$$4 \cos\frac{a+b+c}{2} \cos\frac{-a+b+c}{2} \cos\frac{a-b+c}{2} \cos\frac{a+b-c}{2} = 0.$$

Cette équation n'est autre que la proposée mise sous une autre forme. Pour qu'elle ait lieu, il faut et il suffit que le cosinus de l'un des arcs

$$\frac{a+b+c}{2}, \quad \frac{-a+b+c}{2}, \quad \frac{a-b+c}{2}, \quad \frac{a+b-c}{2}$$

soit nul, et, par suite, que l'un de ces arcs soit égal à $(2k+1)\frac{\pi}{2}$, en désignant par $k$ un nombre entier positif, nul ou négatif.

En résumé, les arcs $a$, $b$, $c$ satisfont à l'une des quatre relations

$$a + b + c = (2k+1)\pi,$$
$$-a + b + c = (2k+1)\pi,$$
$$a - b + c = (2k+1)\pi,$$
$$a + b - c = (2k+1)\pi.$$

49. PROBLÈME IV. — *Trouver la somme des cosinus de $n$ arcs*

$$a, \quad a+h, \quad a+2h, \ldots, \quad a+(n-1)h,$$

*en progression arithmétique.*

Soit $i$ un nombre entier quelconque; on a (n° 44)

$$2\sin\frac{h}{2}\cos(a+ih)=\sin\left(a+\frac{2i+1}{2}h\right)-\sin\left(a+\frac{2i-1}{2}h\right).$$

En donnant à $i$ les valeurs $0, 1, 2, 3, \ldots, n-1$, il vient

$$2\sin\frac{h}{2}\cos a=\sin\left(a+\frac{h}{2}\right)-\sin\left(a-\frac{h}{2}\right),$$

$$2\sin\frac{h}{2}\cos(a+h)=\sin\left(a+\frac{3h}{2}\right)-\sin\left(a+\frac{h}{2}\right),$$

$$2\sin\frac{h}{2}\cos(a+2h)=\sin\left(a+\frac{5h}{2}\right)-\sin\left(a+\frac{3h}{2}\right),$$

..........................................

..........................................

$$2\sin\frac{h}{2}\cos[a+(n-1)h]=\sin\left(a+\frac{2n-1}{2}h\right)-\sin\left(a+\frac{2n-3}{2}h\right).$$

Ajoutant ces égalités membre à membre et faisant les réductions, il vient

$$2\sin\frac{h}{2}\{\cos a+\cos(a+h)+\cos(a+2h)+\ldots+\cos[a+(n-1)h]\}$$
$$=\sin\left(a+\frac{2n-1}{2}h\right)-\sin\left(a-\frac{h}{2}\right),$$

d'où

$$\cos a+\cos(a+h)+\ldots+\cos[a+(n-1)h]$$
$$=\frac{\sin\left(a+\frac{2n-1}{2}h\right)-\sin\left(a-\frac{h}{2}\right)}{2\sin\frac{h}{2}};$$

enfin, en transformant le numérateur du second membre en produit de sinus et cosinus, par les formules du n° 44,

on a

$$\cos a + \cos(a+h) + \cos(a+2h) + \ldots + \cos[a+(n-1)h]$$

$$= \frac{\sin\frac{nh}{2}\cos\left(a+\frac{n-1}{2}h\right)}{\sin\frac{h}{2}}.$$

C'est la formule qui résout le problème.

*Corollaire.* — Si dans cette formule on change $a$ en $\frac{\pi}{2} - a$, et $h$ en $-h$, il vient

$$\sin a + \sin(a+h) + \sin(a+2h) + \ldots + \sin[a+(n-1)h]$$

$$= \frac{\sin\frac{nh}{2}\sin\left(a+\frac{n-1}{2}h\right)}{\sin\frac{h}{2}};$$

cette dernière formule fait connaître la somme des sinus de $n$ arcs en progression arithmétique.

### *Formules relatives à la multiplication des arcs.*

**50.** *Sinus et cosinus.* — Si, dans les formules

$$(1)\qquad \begin{cases} \sin(a+b) = \sin a\cos b + \cos a\sin b, \\ \cos(a+b) = \cos a\cos b - \sin a\sin b, \end{cases}$$

on fait $b = a$, il vient

$$(2)\qquad \begin{cases} \sin 2a = 2\sin a\cos a, \\ \cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a. \end{cases}$$

Ces formules (2) font connaître les valeurs de $\sin 2a$ et de $\cos 2a$ en fonction de $\sin a$ et de $\cos a$. Si on veut les exprimer en fonction de $\sin a$ ou de $\cos a$ seulement, on devra remplacer $\cos a$ par $\sqrt{1-\sin^2 a}$, ou $\sin a$ par $\sqrt{1-\cos^2 a}$;

on obtient ainsi :

$$(3)\quad \begin{cases} \sin 2a = \pm 2 \sin a \sqrt{1 - \sin^2 a} \\ \qquad = \pm 2 \cos a \sqrt{1 - \cos^2 a}, \\ \cos 2a = 1 - 2 \sin^2 a \\ \qquad = 2 \cos^2 a - 1. \end{cases}$$

Il importe de remarquer que $\cos 2a$ s'exprime rationnellement en fonction de $\cos a$ ou de $\sin a$, tandis qu'il est impossible d'exprimer $\sin 2a$ en fonction rationnelle soit de $\sin a$, soit de $\cos a$. Il résulte de là que, si l'on connaît la valeur de $\sin a$ ou de $\cos a$, $\cos 2a$ est entièrement déterminé, tandis que $\sin 2a$ ne l'est qu'en valeur absolue. Nous allons donner la raison de ce fait.

**51.** Supposons d'abord que la valeur de $\sin a$ soit connue, et posons

$$\sin a = \mathrm{A};$$

l'arc $a$ est indéterminé, et ses valeurs, en nombre infini, sont données (n° **25**) par les formules

$$a = 2k\pi + \alpha, \quad a = (2k+1)\pi - \alpha,$$

où $\alpha$ désigne un arc déterminé ayant A pour sinus. D'après cela, les valeurs de $\sin 2a$ et de $\cos 2a$ sont données par les formules

$$\begin{cases} \sin 2a = \sin(4k\pi + 2\alpha) = \sin 2\alpha, \\ \sin 2a = \sin(4k\pi + 2\pi - 2\alpha) = -\sin 2\alpha; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cos 2a = \cos(4k\pi + 2\alpha) = \cos 2\alpha, \\ \cos 2a = \cos(4k\pi + 2\pi - 2\alpha) = \cos 2\alpha. \end{cases}$$

On voit par là que $\sin 2a$ est susceptible de la double valeur $\pm \sin 2\alpha$, tandis que $\cos 2a$ n'a que la seule valeur $\cos 2\alpha$.

La même chose a lieu, si c'est la valeur de $\cos a$ qui est connue. Soit

$$\cos a = \mathrm{A},$$

et $\alpha$ un arc déterminé ayant A pour cosinus; les valeurs de $a$ sont données par la formule

$$a = 2k\pi \pm \alpha,$$

par suite, celles de $\sin 2a$ et de $\cos 2a$ le sont par les suivantes :

$$\sin 2a = \sin(4k\pi \pm 2\alpha) = \pm \sin 2\alpha,$$
$$\cos 2a = \cos(4k\pi \pm 2\alpha) = \cos 2\alpha;$$

$\sin 2a$ a donc deux valeurs égales et de signes contraires, tandis que $\cos 2a$ n'en a qu'une seule.

52. Si, dans les formules (1), on fait $b = 2a$, il vient

$$\sin 3a = \sin a \cos 2a + \cos a \sin 2a,$$
$$\cos 3a = \cos a \cos 2a - \sin a \sin 2a;$$

en remplaçant $\sin 2a$ et $\cos 2a$ par leurs valeurs tirées des équations (2), on a les suivantes :

$$(4)\qquad \begin{cases} \sin 3a = 3\sin a \cos^2 a - \sin^3 a, \\ \cos 3a = \cos^3 a - 3\sin^2 a \cos a, \end{cases}$$

qui font connaître $\sin 3a$ et $\cos 3a$ en fonction de $\sin a$ et $\cos a$. En remplaçant, dans la première, $\cos^2 a$ par $1 - \sin^2 a$, et dans la seconde $\sin^2 a$ par $1 - \cos^2 a$, il vient

$$(5)\qquad \begin{cases} \sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a, \\ \cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a. \end{cases}$$

On voit que $\sin 3a$ et $\cos 3a$ sont exprimables rationnellement, le premier en fonction de $\sin a$, le second en fonction de $\cos a$, tandis qu'il est impossible d'exprimer $\sin 3a$ en fonction rationnelle de $\cos a$, ou $\cos 3a$ en fonction rationnelle de $\sin a$. Il résulte de là que, quand on donne $\sin a$, $\sin 3a$ est entièrement déterminé, tandis que $\cos 3a$ ne l'est qu'en valeur absolue; et, au contraire, si l'on donne $\cos a$, $\cos 3a$ est déterminé, mais $\sin 3a$ ne l'est pas. On peut montrer, à priori, qu'il doit en être ainsi, par des considérations analogues à celles du n° 51.

53. Supposons d'abord qu'on donne $\sin a = A$, les valeurs de $a$ sont

$$a = 2k\pi + \alpha, \quad a = (2k+1)\pi - \alpha,$$

où $\alpha$ désigne un arc déterminé ayant A pour sinus. Les valeurs de $\sin 3a$ et de $\cos 3a$ sont

$$\begin{cases} \sin 3a = \sin(6k\pi + 3\alpha) = \sin 3\alpha, \\ \sin 3a = \sin(6k\pi + 3\pi - 3\alpha) = \sin 3\alpha; \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \cos 3a = \cos(6k\pi + 3\alpha) = \cos 3\alpha, \\ \cos 3a = \cos(6k\pi + 3\pi - 3\alpha) = -\cos 3\alpha; \end{cases}$$

d'où il suit que $\sin 3a$ a la valeur unique $\sin 3\alpha$, tandis que $\cos 3a$ a la double valeur $\pm \cos 3\alpha$.

Le contraire a lieu, si l'on donne $\cos a = A$; les valeurs de $a$ sont

$$a = 2k\pi \pm \alpha,$$

où $\alpha$ désigne un arc déterminé ayant A pour cosinus; les valeurs de $\sin 3a$ et de $\cos 3a$ sont

$$\sin 3a = \sin(6k\pi \pm 3\alpha) = \pm \sin 3\alpha,$$
$$\cos 3a = \cos(6k\pi \pm 3\alpha) = \cos 3\alpha;$$

ainsi, $\sin 3a$ a la double valeur $\pm \sin 3\alpha$, et $\cos 3a$ la valeur unique $\cos 3\alpha$.

54. Si l'on connaît les valeurs de $\sin(m-1)a$ et de $\cos(m-1)a$ en fonction de $\sin a$ et de $\cos a$, on aura celles de $\sin ma$ et de $\cos ma$, en posant $b = (m-1)a$ dans les équations (1), qui deviennent alors

$$\sin ma = \sin a \cos(m-1)a + \cos a \sin(m-1)a,$$
$$\cos ma = \cos a \cos(m-1)a - \sin a \sin(m-1)a,$$

et en substituant à $\sin(m-1)a$ et $\cos(m-1)a$ leurs valeurs connues.

On comprend comment on pourra calculer de proche en

proche, par cette méthode, les valeurs de sin $4a$ et cos $4a$, sin $5a$ et cos $5a$, etc., en fonction de sin $a$ et cos $a$. Mais nous ne pousserons pas plus loin les calculs; nous donnerons d'ailleurs, dans la suite, une méthode générale pour former directement les valeurs de sin $ma$ et de cos $ma$, quel que soit l'entier $m$.

55. *Tangentes et cotangentes.* — Si, dans la formule

$$\text{(6)} \qquad \operatorname{tang}(a+b) = \frac{\operatorname{tang} a + \operatorname{tang} b}{1 - \operatorname{tang} a \operatorname{tang} b},$$

on fait $b = a$, il vient

$$\text{(7)} \qquad \operatorname{tang} 2a = \frac{2 \operatorname{tang} a}{1 - \operatorname{tang}^2 a},$$

formule qui fait connaître tang $2a$ en fonction rationnelle de tang $a$.

Si, dans la formule (6), on fait $b = 2a$, il vient

$$\operatorname{tang} 3a = \frac{\operatorname{tang} a + \operatorname{tang} 2a}{1 - \operatorname{tang} a \operatorname{tang} 2a},$$

et, en remplaçant tang $2a$ par sa valeur,

$$\operatorname{tang} 3a = \frac{3 \operatorname{tang} a - \operatorname{tang}^3 a}{1 - 3 \operatorname{tang}^2 a}.$$

Généralement, si tang $(m-1)a$ est connue, on aura tang $ma$ par la formule

$$\operatorname{tang} ma = \frac{\operatorname{tang} a + \operatorname{tang}(m-1)a}{1 - \operatorname{tang} a \operatorname{tang}(m-1)a}.$$

On pourra donc calculer successivement les valeurs de tang $4a$, tang $5a$, etc., qui seront toutes exprimées en fonction rationnelle de tang $a$. Nous donnerons dans la suite l'expression générale de tang $ma$ en fonction de tang $a$.

56. On peut démontrer, à priori, que si la valeur A de tang $a$ est connue, celle de tang $ma$ est déterminée. En

effet, si $\alpha$ désigne un arc déterminé ayant A pour tangente, les valeurs de $a$ sont données par la formule (n° 27)

$$a = k\pi + \alpha;$$

et celles de tang $ma$ le sont par la suivante :

$$\text{tang}\, ma = \text{tang}\,(mk\pi + m\alpha) = \text{tang}\, m\alpha;$$

tang $ma$ n'a donc que la seule valeur tang $m\alpha$.

57. Si, dans la formule

$$\cot(a+b) = \frac{\cot a \cot b - 1}{\cot a + \cot b},$$

on fait $b = a$, il vient

$$\cot 2a = \frac{\cot^2 a - 1}{2 \cot a}.$$

Cette formule peut d'ailleurs se déduire de celle qui exprime tang $2a$ en fonction de tang $a$ : en général, si l'on a l'expression de tang $ma$ en fonction de tang $a$, en remplaçant tang $ma$ par $\frac{1}{\cot ma}$ et tang $a$ par $\frac{1}{\cot a}$, on aura l'expression de cot $ma$ en fonction de cot $a$.

### *De la division des arcs.*

58. *Sinus et cosinus.* — Si, dans les formules

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a,$$
$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a,$$

on met $\frac{1}{2}a$ au lieu de $a$, il vient

$$(1) \quad \begin{cases} \sin a = 2 \sin \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}a, \\ \cos a = \cos^2 \frac{1}{2}a - \sin^2 \frac{1}{2}a. \end{cases}$$

Ces formules permettent de calculer $\sin \frac{1}{2}a$ et $\cos \frac{1}{2}a$, quand on connaît soit $\cos a$, soit $\sin a$ : nous allons examiner ces deux cas.

59. *Étant donné $\cos a$, trouver $\sin \frac{1}{2} a$ et $\cos \frac{1}{2} a$.* — Des deux formules

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} a - \sin^2 \tfrac{1}{2} a = \cos a,$$

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} a + \sin^2 \tfrac{1}{2} a = 1,$$

on tire

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} a = \frac{1 + \cos a}{2}, \qquad \sin^2 \tfrac{1}{2} a = \frac{1 - \cos a}{2},$$

d'où

$$(2) \qquad \cos \tfrac{1}{2} a = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}}, \qquad \sin \tfrac{1}{2} a = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}}.$$

On voit que les valeurs absolues de $\cos \frac{1}{2} a$ et $\sin \frac{1}{2} a$ sont déterminées, mais que leurs signes ne le sont pas. On peut expliquer ce résultat par des considérations déjà employées. Soient A la valeur donnée de $\cos a$, et $\alpha$ un arc déterminé ayant A pour cosinus; les valeurs de $a$ pour lesquelles on a $\cos a = A$ sont données par la formule

$$a = 2k\pi \pm \alpha,$$

par suite, les valeurs de $\cos \frac{1}{2} a$ et de $\sin \frac{1}{2} a$ le sont par les suivantes :

$$\cos \tfrac{1}{2} a = \cos (k\pi \pm \tfrac{1}{2} \alpha),$$

$$\sin \tfrac{1}{2} a = \sin (k\pi \pm \tfrac{1}{2} \alpha).$$

Or, si l'on prend pour $k$ un nombre pair, ces formules deviennent (nos 10 et 21)

$$\cos \tfrac{1}{2} a = \cos \tfrac{1}{2} \alpha,$$

$$\sin \tfrac{1}{2} a = \pm \sin \tfrac{1}{2} \alpha;$$

et si l'on prend pour $k$ un nombre impair, elles deviennent

$$\cos \tfrac{1}{2} a = - \cos \tfrac{1}{2} \alpha,$$

$$\sin \tfrac{1}{2} a = \pm \sin \tfrac{1}{2} \alpha;$$

ce qui montre que $\cos\frac{1}{2}a$ est susceptible de la double valeur $\pm\cos\frac{1}{2}\alpha$, et $\sin\frac{1}{2}a$ de la double valeur $\pm\sin\frac{1}{2}\alpha$.

**60.** Si l'arc $a$ est donné, on pourra obtenir $\sin\frac{1}{2}a$ et $\cos\frac{1}{2}a$, à l'aide des formules (2), car alors les signes de $\sin\frac{1}{2}a$ et $\cos\frac{1}{2}a$ sont connus d'avance. Veut-on, par exemple, avoir le sinus et le cosinus de l'arc $\frac{\pi}{12}$, sachant que le cosinus de $\frac{\pi}{6}$ est $\frac{\sqrt{3}}{2}$; les formules (2) donneront

$$\cos\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2},\quad \sin\frac{\pi}{12}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$$

**61.** *Étant donné sin a, trouver* $\cos\frac{1}{2}a$ *et* $\sin\frac{1}{2}a$. — Des deux formules

$$2\sin\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}a=\sin a,$$

$$\cos^2\tfrac{1}{2}a+\sin^2\tfrac{1}{2}a=1,$$

on déduit, par addition et soustraction,

$$(\cos\tfrac{1}{2}a+\sin\tfrac{1}{2}a)^2=1+\sin a,$$

$$(\cos\tfrac{1}{2}a-\sin\tfrac{1}{2}a)^2=1-\sin a;$$

d'où

$$\cos\tfrac{1}{2}a+\sin\tfrac{1}{2}a=\pm\sqrt{1+\sin a},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}a-\sin\tfrac{1}{2}a=\pm\sqrt{1-\sin a},$$

et, par conséquent,

$$(3)\quad\begin{cases}\cos\frac{1}{2}a=\pm\frac{1}{2}(\sqrt{1+\sin a}\pm\sqrt{1-\sin a}),\\ \sin\frac{1}{2}a=\pm\frac{1}{2}(\sqrt{1+\sin a}\mp\sqrt{1-\sin a}).\end{cases}$$

Dans ces deux formules, les signes supérieurs ou inférieurs, hors des parenthèses ou dans les parenthèses, se cor-

respondent ; mais dans chacune d'elles le signe hors des parenthèses est indépendant de celui qui se trouve dans la parenthèse. On trouve ainsi quatre valeurs pour $\cos\frac{1}{2}a$ et quatre pour $\sin\frac{1}{2}a$ ; et il est remarquable que les valeurs de $\cos\frac{1}{2}a$ soient précisément les mêmes que celles de $\sin\frac{1}{2}a$. Nous allons expliquer ce résultat.

Soient A la valeur donnée de $\sin a$, et $\alpha$ un arc déterminé ayant A pour sinus ; les valeurs de $a$ sont données par les formules

$$a = 2k\pi + \alpha, \quad a = (2k+1)\pi - \alpha;$$

les valeurs de $\cos\frac{1}{2}a$ et de $\sin\frac{1}{2}a$ sont donc

$$\cos\tfrac{1}{2}a = \cos(k\pi + \tfrac{1}{2}\alpha), \quad \cos\tfrac{1}{2}a = \cos\left(k\pi + \frac{\pi}{2} - \tfrac{1}{2}\alpha\right),$$

$$\sin\tfrac{1}{2}a = \sin(k\pi + \tfrac{1}{2}\alpha), \quad \sin\tfrac{1}{2}a = \sin\left(k\pi + \frac{\pi}{2} - \tfrac{1}{2}\alpha\right).$$

Si l'on prend pour $k$ un nombre pair, ces formules deviennent

$$\cos\tfrac{1}{2}a = \cos\tfrac{1}{2}\alpha, \quad \cos\tfrac{1}{2}a = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \tfrac{1}{2}\alpha\right) = \sin\tfrac{1}{2}\alpha,$$

$$\sin\tfrac{1}{2}a = \sin\tfrac{1}{2}\alpha, \quad \sin\tfrac{1}{2}a = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \tfrac{1}{2}\alpha\right) = \cos\tfrac{1}{2}\alpha;$$

et, si l'on prend pour $k$ un nombre impair, elles deviennent

$$\cos\tfrac{1}{2}a = -\cos\tfrac{1}{2}\alpha, \quad \cos\tfrac{1}{2}a = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - \tfrac{1}{2}\alpha\right) = -\sin\tfrac{1}{2}\alpha,$$

$$\sin\tfrac{1}{2}a = -\sin\tfrac{1}{2}\alpha, \quad \sin\tfrac{1}{2}a = -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \tfrac{1}{2}\alpha\right) = -\cos\tfrac{1}{2}\alpha;$$

d'où il suit que $\cos\frac{1}{2}a$ et $\sin\frac{1}{2}a$ ont chacun les quatre valeurs $\pm\cos\frac{1}{2}\alpha$, $\pm\sin\frac{1}{2}\alpha$.

**62.** Si l'arc $a$ est donné, voici comment on pourra ob-

tenir, par les formules (3), les valeurs de $\cos\frac{1}{2}a$ et de $\sin\frac{1}{2}a$. Puisque l'arc $a$ est connu, on sait quels sont les signes de $\cos\frac{1}{2}a$ et de $\sin\frac{1}{2}a$; or, des quatre valeurs fournies par les formules (3), deux sont positives et deux négatives: on devra donc rejeter les deux négatives ou les deux positives, suivant les cas, et il n'y aura plus qu'à choisir entre les deux autres. Supposons, pour fixer les idées, que $\sin a$ soit positif, ainsi que $\cos\frac{1}{2}a$ et $\sin\frac{1}{2}a$; alors on aura

$$\cos\frac{1}{2}a = +\frac{1}{2}(\sqrt{1+\sin a} \pm \sqrt{1-\sin a}),$$

$$\sin\frac{1}{2}a = +\frac{1}{2}(\sqrt{1+\sin a} \mp \sqrt{1-\sin a}).$$

En réduisant maintenant l'arc $\frac{1}{2}a$ au premier quadrant, on obtiendra un arc plus grand ou plus petit que $\frac{\pi}{4}$: dans le premier cas, on a $\sin\frac{1}{2}a > \cos\frac{1}{2}a$, et l'on prendra les signes inférieurs dans les formules précédentes; dans le second cas, on a $\sin\frac{1}{2}a < \cos\frac{1}{2}a$, et l'on prendra les signes supérieurs.

Veut-on, par exemple, trouver $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$, sachant que $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$; on aura

$$\cos\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}},$$

$$\sin\frac{\pi}{12} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} - \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}.$$

Il est facile de déduire ces valeurs de $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$ de celles que nous avons données au n° 60.

63. Si, dans la formule (n° 52)

$$\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a,$$

on remplace $a$ par $\frac{a}{3}$, il vient

$$\cos a = 4\cos^3\frac{a}{3} - 3\cos\frac{a}{3};$$

cette équation sert à résoudre la question suivante :

*Trouver* $\cos\frac{a}{3}$, *connaissant* $\cos a$. — Soient $\cos a = A$ et $\cos\frac{a}{3} = x$; l'équation précédente devient

$$(4) \qquad x^3 - \frac{3}{4}x - \frac{A}{4} = 0.$$

Elle est du troisième degré, et l'algèbre apprend qu'elle a trois racines réelles. On peut démontrer ce fait de la manière suivante. $\alpha$ étant un arc déterminé dont le cosinus est A, les valeurs de $a$ sont données par la formule

$$a = 2k\pi \pm \alpha,$$

et les valeurs de $x$ le sont par la suivante :

$$x = \cos\left(\frac{2k\pi}{3} \pm \frac{\alpha}{3}\right),$$

où l'on doit donner à $k$ toutes les valeurs entières positives, nulle ou négatives. Or, quel que soit $k$, on peut écrire

$$k = 3q + i,$$

$i$ étant l'un des nombres 0, 1 ou 2 : on a donc

$$x = \cos\left(2q\pi + \frac{2i\pi}{3} \pm \frac{\alpha}{3}\right) = \cos\left(\frac{2i\pi}{3} \pm \frac{\alpha}{3}\right),$$

d'où il suit que $x$ a les six valeurs

$$\cos\frac{\alpha}{3}, \quad \cos\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}\right), \quad \cos\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}\right),$$

$$\cos\left(\frac{-\alpha}{3}\right), \quad \cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\alpha}{3}\right), \quad \cos\left(\frac{4\pi}{3} - \frac{\alpha}{3}\right).$$

Mais les trois dernières sont égales aux trois premières chacune à chacune, car les arcs $\frac{\alpha}{3}$ et $\frac{-\alpha}{3}$ ont leurs cosinus égaux, et il en est de même des deux arcs $\frac{2\pi}{3} \pm \frac{\alpha}{3}$ et $\frac{4\pi}{3} \mp \frac{\alpha}{3}$ dont la somme est égale à $2\pi$. On voit donc que l'équation (4) a les trois racines

$$\cos\frac{\alpha}{3}, \quad \cos\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}\right), \quad \cos\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}\right),$$

qui sont généralement inégales, et qu'elle ne saurait en avoir un plus grand nombre. Enfin on connaîtra ces trois cosinus toutes les fois qu'on pourra résoudre l'équation (4).

64. Supposons que l'on ait choisi pour $\alpha$ le plus petit arc positif ayant A pour cosinus; on aura $\alpha <$ ou $= \pi$. Prenons, à partir de l'origine A (*fig.* 5), l'arc $AM = \frac{\alpha}{3}$, et inscrivons dans la circonférence le triangle équilatéral MNP; les perpendiculaires abaissées des trois sommets sur le diamètre BB' perpendiculaire à AA', prises avec le signe + si elles sont du même côté que A par rapport à BB', et avec le signe — dans le cas contraire, représenteront les trois racines de l'équation (4). D'ailleurs l'algèbre apprend que la somme de ces racines est nulle, parce que l'équation ne contient pas de terme de la seconde dimension; on peut donc conclure ce théorème de géométrie, fort connu, du reste :

*Si des trois sommets d'un triangle équilatéral, on abaisse des perpendiculaires sur un diamètre quelconque du cercle circonscrit, la somme des deux perpendiculaires situées d'un même côté du diamètre sera égale à la perpendiculaire située de l'autre côté.*

On peut démontrer directement que la somme des racines de l'équation (4) est nulle. Cette somme est, en effet,

$$\cos\frac{\alpha}{3}+\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}\right)+\cos\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}\right),$$

ou

$$\cos\frac{\alpha}{3}\left(1+\cos\frac{2\pi}{3}+\cos\frac{4\pi}{3}\right)-\sin\frac{\alpha}{3}\left(\sin\frac{2\pi}{3}+\sin\frac{4\pi}{3}\right);$$

on a d'ailleurs

$$\cos\frac{4\pi}{3}=\cos\frac{2\pi}{3}=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2},$$

$$\sin\frac{4\pi}{3}=-\sin\frac{2\pi}{3},$$

d'où l'on conclut que la somme en question est nulle.

65. L'équation (4) a deux racines négatives et une positive si A est positif ou $\alpha<\frac{\pi}{2}$; au contraire, elle a deux racines positives et une négative si A est négatif ou $\alpha>\frac{\pi}{2}$.

En effet, soit toujours $AM=\frac{\alpha}{3}$ (*fig.* 5); en prenant l'arc $MN=\frac{2\pi}{3}$, le point N tombera évidemment sur la demi-circonférence BA'B', et l'on aura $BN=AM+\frac{\pi}{6}$. Cela posé, si A est positif, on a $\alpha<\frac{\pi}{2}$, et, par conséquent, $BN<\frac{\pi}{3}$; donc, en prenant l'arc $NA'P=\frac{2\pi}{3}$, le point P tombera sur la demi-circonférence BA'B': d'où l'on peut conclure que l'équation (4) a deux racines négatives et une positive. Si A est négatif, on a $\alpha>\frac{\pi}{2}$, et $\alpha<\pi$; par

suite, $BN > \frac{\pi}{3}$ et $< \frac{\pi}{2}$. Donc le point N tombera sur le quadrant BA'; et comme sa distance au point B surpasse $\frac{\pi}{3}$, en prenant l'arc $NA'P = \frac{2\pi}{3}$, le point P tombera dans le quadrant B'A : d'où l'on conclut que l'équation (4) a deux racines positives et une négative.

Il est aisé de voir que les valeurs absolues des racines de même signe sont comprises l'une entre o et $\frac{1}{2}$, l'autre entre $\frac{1}{2}$ et 1. En effet, ces valeurs absolues sont précisément les longueurs $Nn$, $Pp$ qu'on peut considérer comme les sinus des arcs NB et PB'; ces deux arcs ont une somme égale à $\pi - \frac{2\pi}{3}$ ou $\frac{\pi}{3}$, donc l'un est inférieur, l'autre supérieur à $\frac{\pi}{6}$; par conséquent, l'une des longueurs $Nn$ et $Pp$ est moindre que $\sin\frac{\pi}{6}$ ou $\frac{1}{2}$, et l'autre est plus grande. Quant à la troisième racine de l'équation (4), sa valeur absolue est supérieure à $\frac{1}{2}$, puisqu'elle est égale à la somme des valeurs absolues des deux autres.

D'après cela, si A désigne, dans l'équation (4), le cosinus d'un arc donné $a$, on pourra toujours savoir quelle est celle des trois racines qui est égale à $\cos\frac{a}{3}$, car on connaît d'avance le signe de ce cosinus, et l'on sait aussi si sa valeur absolue est moindre ou plus grande que $\frac{1}{2}$.

66. Proposons-nous encore de *trouver* $\sin\frac{1}{3}a$, *connais-*

*sant sin a*. Si, dans la formule

$$\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a,$$

on met $\frac{a}{3}$ au lieu de $a$, il vient

$$\sin a = 3\sin\frac{a}{3} - 4\sin^3\frac{a}{3}.$$

Posons $\sin a = A$ et $\sin\frac{a}{3} = x$, on aura l'équation

(5) $$x^3 - \frac{3}{4}x + \frac{A}{4} = 0,$$

qui se déduit de l'équation (4) en changeant A en — A.

Pour savoir ce que représentent les trois racines de cette équation, soit $\alpha$ un arc déterminé ayant A pour sinus; les valeurs de $a$ sont données par les formules

$$a = 2k\pi + \alpha, \quad a = (2k+1)\pi - \alpha;$$

et celles de $x$ par les suivantes :

$$x = \sin\left(\frac{2k\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}\right), \qquad x = \sin\left(\frac{2k+1}{3}\pi - \frac{\alpha}{3}\right).$$

Soit $k = 3q + i$, $i$ étant l'un des nombres 0, 1, 2; ces formules deviennent

$$x = \sin\left(2q\pi + \frac{2i\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}\right) = \sin\left(\frac{2i\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}\right),$$
$$x = \sin\left(2q\pi + \frac{2i+1}{3}\pi - \frac{\alpha}{3}\right) = \sin\left(\frac{2i+1}{3}\pi - \frac{\alpha}{3}\right);$$

d'où il suit que $x$ a les six valeurs

$$\sin\frac{\alpha}{3}, \qquad \sin\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}\right), \qquad \sin\left(\frac{4\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}\right),$$
$$\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\alpha}{3}\right), \qquad \sin\left(\frac{3\pi}{3} - \frac{\alpha}{3}\right), \qquad \sin\left(\frac{5\pi}{3} - \frac{\alpha}{3}\right).$$

Mais les trois dernières sont égales aux trois premières chacune à chacune, car les arcs $\frac{\alpha}{3}$ et $\frac{3\pi}{3}-\frac{\alpha}{3}$, $\frac{2\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}$ et $\frac{\pi}{3}-\frac{\alpha}{3}$, $\frac{4\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}$ et $\frac{5\pi}{3}-\frac{\alpha}{3}$ ayant pour somme un nombre impair de demi-circonférences, ont le même sinus. L'équation (5) a donc les trois racines

$$\sin\frac{\alpha}{3},\qquad \sin\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}\right),\qquad \sin\left(\frac{4\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}\right),$$

et n'en a pas davantage.

Ce problème donne lieu à des remarques semblables à celles des nos 64 et 65. Le lecteur les développera suffisamment lui-même.

67. En général, si l'on veut obtenir $\sin\frac{a}{m}$, ou $\cos\frac{a}{m}$, connaissant $\sin a$ ou $\cos a$, on commencera par former l'équation qui donne $\sin ma$ ou $\cos ma$ en fonction de $\sin a$ ou de $\cos a$; puis, en mettant $\frac{a}{m}$ au lieu de $a$, on aura l'équation dont dépend l'inconnue que l'on cherche. Cette équation sera, suivant les cas, du degré $m$ ou du degré $2m$. Nous donnerons plus loin tous les développements que comporte cette importante question, mais il est bon de remarquer, dès à présent, que la détermination de $\sin\frac{a}{m}$ ou de $\cos\frac{a}{m}$ ne dépend que des équations du second degré, si $m$ est une puissance de 2; car, après avoir trouvé $\sin\frac{1}{2}a$ et $\cos\frac{1}{2}a$ en fonction de $\sin a$ ou de $\cos a$ par les méthodes des nos 59 et 61, on pourra, de la même manière, trouver $\sin\frac{a}{4}$ et $\cos\frac{a}{4}$, $\sin\frac{a}{8}$ et $\cos\frac{a}{8}$, etc.

68. *Tangentes et cotangentes. Trouver* $\tang \frac{1}{2} a$, *connaissant* $\tang a$.

Si, dans la formule

$$\tang 2a = \frac{2 \tang a}{1 - \tang^2 a},$$

on remplace $a$ par $\frac{1}{2} a$, il vient

$$\tang a = \frac{2 \tang \frac{1}{2} a}{1 - \tang^2 \frac{1}{2} a};$$

d'où, en faisant $\tang a = A$, $\tang \frac{1}{2} a = x$,

$$(6) \qquad x^2 + \frac{2}{A} x - 1 = 0.$$

On voit que le problème dépend d'une équation du second degré, dont les racines ont pour produit $-1$, quel que soit A. Pour savoir ce que représentent ces deux racines, soit $\alpha$ un arc déterminé ayant A pour tangente; les valeurs de $a$ sont données par la formule

$$a = k\pi + \alpha,$$

et celles de $x$ par la suivante :

$$x = \tang\left(k\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\alpha\right).$$

Si l'on prend pour $k$ un nombre pair $2q$, cette formule donne

$$x = \tang(q\pi + \tfrac{1}{2}\alpha) = \tang \tfrac{1}{2}\alpha,$$

et, si l'on prend pour $k$ un nombre impair $2q+1$, elle donne

$$x = \tang\left(q\pi + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\alpha\right) = \tang\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\alpha\right)$$
$$= \cot(-\tfrac{1}{2}\alpha) = -\cot\tfrac{1}{2}\alpha;$$

d'où il suit que $x$ a les deux valeurs $\tang \frac{1}{2} \alpha$ et $-\cot \frac{1}{2} \alpha$, dont le produit est effectivement égal à $-1$.

Si l'arc $a$ est donné, l'équation (6) fait connaître $\tang \frac{1}{2} a$, car on sait d'avance quel est son signe. Supposons, par exemple, qu'on veuille trouver $\tang \frac{\pi}{8}$, sachant que $\tang \frac{\pi}{4} = 1$. On fera $A = 1$ dans l'équation (5), qui devient alors

$$x^2 + 2x - 1 = 0.$$

La racine positive est égale à $\tang \frac{\pi}{8}$; on a ainsi

$$\tang \frac{\pi}{8} = \frac{-1 + \sqrt{2}}{2}.$$

69. On peut exprimer très-simplement $\tang \frac{1}{2} a$ en fonction de $\sin a$ et de $\cos a$; la formule qu'on obtient ainsi est souvent utile. On a

$$\tang \tfrac{1}{2} a = \frac{\sin \frac{1}{2} a}{\cos \frac{1}{2} a} = \frac{2 \sin \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} a}{2 \cos^2 \frac{1}{2} a} = \frac{2 \sin \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} a}{2 \sin^2 \frac{1}{2} a},$$

et, en faisant usage des formules (1), on trouve

$$(7) \qquad \tang \tfrac{1}{2} a = \frac{\sin a}{1 + \cos a} = \frac{1 - \cos a}{\sin a}.$$

En remplaçant $\sin a$ par $\sqrt{1 - \cos^2 a}$, on a encore

$$(8) \qquad \tang \tfrac{1}{2} a = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}}.$$

70. Lorsque $\tang a$ est donnée, on peut trouver, par la méthode du n° 68, les valeurs de $\tang \frac{a}{4}$, $\tang \frac{a}{8}$, etc.; car, après avoir trouvé $\tang \frac{1}{2} a$, on aura, par la même méthode,

tang $\frac{a}{4}$, puis tang $\frac{a}{8}$, etc. On peut aussi chercher directement tang $\frac{a}{2^m}$; on trouve, de cette manière, une équation du degré $2^m$, dont la résolution peut toujours être effectuée, d'après ce qui précède, à l'aide d'équations du deuxième degré. Nous engageons le lecteur à chercher lui-même à résoudre l'équation du quatrième degré dont dépend tang $\frac{a}{4}$, quand on donne tang $a$; mais nous croyons inutile d'entrer, à ce sujet, dans de plus grands développements.

71. *Trouver tang $\frac{a}{3}$, connaissant tang $a$.* — Si, dans la formule

$$\operatorname{tang} 3a = \frac{3 \operatorname{tang} a - \operatorname{tang}^3 a}{1 - 3 \operatorname{tang}^2 a},$$

on remplace $a$ par $\frac{a}{3}$, il vient

$$\operatorname{tang} a = \frac{3 \operatorname{tang} \frac{a}{3} - \operatorname{tang}^3 \frac{a}{3}}{1 - 3 \operatorname{tang}^2 \frac{a}{3}},$$

ou, en faisant tang $a = \text{A}$, tang $\frac{a}{3} = x$,

(9) $$\text{A} = \frac{3x - x^3}{1 - 3x^2},$$

ou

(10) $$x^3 - 3\text{A}x^2 - 3x + \text{A} = 0.$$

On voit que le problème dépend d'une équation du troisième degré. Pour savoir ce que représentent les racines de cette équation, soit $\alpha$ un arc déterminé ayant A pour tangente; les valeurs de $a$ sont données par la formule

$$a = k\pi + \alpha,$$

et celles de $x$ par la formule

$$x = \text{tang}\left(\frac{k\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}\right).$$

Posons $k = 3q + i$, $i$ étant l'un des nombres o, 1 ou 2; la formule précédente devient

$$x = \text{tang}\left(q\pi + \frac{i\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}\right) = \text{tang}\left(\frac{i\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}\right),$$

d'où il suit que $x$ a les trois valeurs

$$\text{tang}\,\frac{\alpha}{3},\quad \text{tang}\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}\right),\quad \text{tang}\left(\frac{2\pi}{3} + \frac{\alpha}{3}\right),$$

et n'en a pas davantage.

72. Si la valeur donnée de A est infinie, on considère l'équation (9), qui n'est autre que l'équation (10), mise sous une autre forme, et l'on voit que pour $A = \infty$, elle se réduit à

$$3x^2 - 1 = 0,$$

qui n'a que deux racines, savoir $+\frac{1}{\sqrt{3}}$ et $-\frac{1}{\sqrt{3}}$. D'un autre côté, comme $\alpha = \frac{\pi}{2}$, les expressions des racines de l'équation (10) se réduisent à

$$\text{tang}\,\frac{\pi}{6},\quad \text{tang}\,\frac{\pi}{2},\quad \text{tang}\,\frac{5\pi}{6};$$

d'où il suit que pour $A = \infty$, l'une des racines de l'équation (10) devient infinie, et les deux autres se réduisent à $\text{tang}\,\frac{\pi}{6}$ et $\text{tang}\,\frac{5\pi}{6}$. On a

$$\text{tang}\,\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}},\quad \text{tang}\,\frac{5\pi}{6} = \frac{-1}{\sqrt{3}}.$$

73. On peut déterminer aisément deux limites qui comprennent chaque racine de l'équation (10). Supposons que l'on ait choisi pour $\alpha$ le plus petit arc positif qui a A pour tangente, et soit d'abord $A > 0$ ou $\alpha < \frac{\pi}{2}$: l'arc $\frac{\alpha}{3}$ est compris entre 0 et $\frac{\pi}{6}$, donc sa tangente est comprise entre 0 et $\frac{1}{\sqrt{3}}$; l'arc $\frac{\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}$ est compris entre $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{2}$, donc sa tangente est comprise entre $\sqrt{3}$ et $+\infty$; enfin l'arc $\frac{2\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}$ est compris entre $\frac{2\pi}{3}$ et $\frac{5\pi}{6}$, sa tangente est donc négative, et a une valeur absolue comprise entre $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et $\sqrt{3}$. Soient maintenant $A < 0$ ou $\alpha > \frac{\pi}{2}$ et $< \pi$: l'arc $\frac{\alpha}{3}$ est compris entre $\frac{\pi}{6}$ et $\frac{\pi}{3}$, donc sa tangente est comprise entre $\frac{1}{\sqrt{3}}$ et $\sqrt{3}$; l'arc $\frac{\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}$ est compris entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{2\pi}{3}$, donc sa tangente est négative et a une valeur absolue comprise entre $\infty$ et $\sqrt{3}$; enfin l'arc $\frac{2\pi}{3}+\frac{\alpha}{3}$ est compris entre $\frac{5\pi}{6}$ et $\pi$, donc sa tangente est négative et a une valeur absolue comprise entre 0 et $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Il résulte de là que l'équation (10) a deux racines positives et une négative, ou deux négatives et une positive; et que les valeurs absolues des racines de même signe sont, l'une inférieure à $\frac{1}{\sqrt{3}}$, l'autre supérieure à $\sqrt{3}$; par conséquent, l'une inférieure, l'autre supérieure à 1. Si donc l'arc $a$ est donné, on pourra toujours déterminer quelle est celle

des racines de l'équation (10) qui représente tang $\frac{a}{3}$, car le signe de cette tangente est connu d'avance, et l'on sait aussi si sa valeur absolue est inférieure ou supérieure à 1.

**74.** Généralement, si l'on veut avoir tang $\frac{a}{m}$, connaissant tang $a$, on commencera par former l'équation qui donne tang $ma$ en fonction de tang $a$, on changera $a$ en $\frac{a}{m}$, et l'on aura l'équation dont dépend l'inconnue que l'on cherche. Cette équation est toujours du degré $m$.

**75.** Le problème qui consisterait à déterminer cot $\frac{a}{m}$, connaissant cot $a$, est identique au précédent, car cot $\frac{a}{m}$ et cot $a$ sont les inverses de tang $\frac{a}{m}$ et de tang $a$.

*Détermination des sinus et cosinus de certains arcs.*

**76.** On peut calculer les sinus et cosinus d'une infinité d'arcs compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$, par de simples extractions de racines carrées.

Par exemple, en partant de l'arc $\frac{\pi}{2}$, on obtient, par la méthode des nos 59 ou 61, les sinus et cosinus des arcs

$$\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{8},\ \frac{\pi}{16},\ldots,$$

et, par suite, aussi les sinus et cosinus de leurs multiples. Ainsi, quels que soient les entiers $m$ et $n$, on obtient par de simples extractions de racines carrées le sinus et le co-

sinus de l'arc

$$\frac{n\pi}{2^m}.$$

Pareillement les sinus et cosinus des arcs $\frac{\pi}{3}$ et $\frac{\pi}{5}$ étant connus, on pourra calculer de même le sinus et le cosinus des arcs

$$\frac{n\pi}{3.2^m}, \quad \frac{n\pi}{5.2^m},$$

quels que soient les entiers $m$ et $n$. Nous allons déterminer ainsi les sinus et cosinus des multiples de l'arc $\frac{\pi}{20}$.

77. *Sinus et cosinus des multiples de l'arc* $\frac{\pi}{20}$. — Nous avons donné (nº 46) les valeurs des sinus et cosinus de l'arc $\frac{\pi}{10}$ ou $\frac{2\pi}{20}$; on a

$$\sin\frac{2\pi}{20} = \cos\frac{8\pi}{20} = \frac{-1+\sqrt{5}}{4},$$

$$\sin\frac{8\pi}{20} = \cos\frac{2\pi}{20} = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}.$$

Connaissant le sinus de $\frac{2\pi}{20}$, on aura $\sin\frac{\pi}{20}$ et $\cos\frac{\pi}{20}$ par les formules

$$\sin\frac{\pi}{20} = \frac{1}{2}\sqrt{1+\sin\frac{2\pi}{20}} - \frac{1}{2}\sqrt{1-\sin\frac{2\pi}{20}},$$

$$\cos\frac{\pi}{20} = \frac{1}{2}\sqrt{1+\sin\frac{2\pi}{20}} + \frac{1}{2}\sqrt{1-\sin\frac{2\pi}{20}};$$

on trouve

$$\sin\frac{\pi}{20} = \cos\frac{9\pi}{20} = \frac{1}{4}\sqrt{3+\sqrt{5}} - \frac{1}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}},$$

$$\sin\frac{9\pi}{20} = \cos\frac{\pi}{20} = \frac{1}{4}\sqrt{3+\sqrt{5}} + \frac{1}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}}.$$

On obtiendra $\sin\frac{4\pi}{20}$ et $\cos\frac{4\pi}{20}$ à l'aide des formules

$$\sin\frac{4\pi}{20} = 2\sin\frac{2\pi}{20}\cos\frac{2\pi}{20},$$

$$\cos\frac{4\pi}{20} = \cos^2\frac{2\pi}{20} - \sin^2\frac{2\pi}{20};$$

on trouve

$$\sin\frac{4\pi}{20} = \cos\frac{6\pi}{20} = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}},$$

$$\sin\frac{6\pi}{20} = \cos\frac{4\pi}{20} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.$$

On aura $\sin\frac{3\pi}{20}$ et $\cos\frac{3\pi}{20}$ par les formules

$$\sin\frac{3\pi}{20} = \frac{1}{2}\sqrt{1+\sin\frac{6\pi}{20}} - \frac{1}{2}\sqrt{1-\sin\frac{6\pi}{20}},$$

$$\cos\frac{3\pi}{20} = \frac{1}{2}\sqrt{1+\sin\frac{6\pi}{20}} + \frac{1}{2}\sqrt{1-\sin\frac{6\pi}{20}};$$

on trouve

$$\sin\frac{3\pi}{20} = \cos\frac{7\pi}{20} = \frac{1}{4}\sqrt{5+\sqrt{5}} - \frac{1}{4}\sqrt{3-\sqrt{5}},$$

$$\sin\frac{7\pi}{20} = \cos\frac{3\pi}{20} = \frac{1}{4}\sqrt{5+\sqrt{5}} + \frac{1}{4}\sqrt{3-\sqrt{5}}.$$

Enfin on a

$$\sin\frac{5\pi}{20} = \cos\frac{5\pi}{20} = \frac{\sqrt{2}}{2};$$

donc, en résumé, on a

$$
\left\{
\begin{aligned}
\sin\frac{\pi}{20} &= \cos\frac{9\pi}{20} = \frac{1}{4}\sqrt{3+\sqrt{5}} - \frac{1}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}},\\
\sin\frac{2\pi}{20} &= \cos\frac{8\pi}{20} = \frac{1}{4}(-1+\sqrt{5}),\\
\sin\frac{3\pi}{20} &= \cos\frac{7\pi}{20} = \frac{1}{4}\sqrt{5+\sqrt{5}} - \frac{1}{4}\sqrt{3-\sqrt{5}},\\
\sin\frac{4\pi}{20} &= \cos\frac{6\pi}{20} = \frac{1}{4}\sqrt{10-2\sqrt{5}},\\
\sin\frac{5\pi}{20} &= \cos\frac{5\pi}{20} = \frac{1}{2}\sqrt{2},\\
\sin\frac{6\pi}{20} &= \cos\frac{4\pi}{20} = \frac{1}{4}(1+\sqrt{5}),\\
\sin\frac{7\pi}{20} &= \cos\frac{3\pi}{20} = \frac{1}{4}\sqrt{5+\sqrt{5}} + \frac{1}{4}\sqrt{3-\sqrt{5}},\\
\sin\frac{8\pi}{20} &= \cos\frac{2\pi}{20} = \frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}},\\
\sin\frac{9\pi}{20} &= \cos\frac{\pi}{20} = \frac{1}{4}\sqrt{3+\sqrt{5}} + \frac{1}{4}\sqrt{5-\sqrt{5}}.
\end{aligned}
\right.
$$

A l'aide de ces formules, on pourra calculer les sinus et cosinus des multiples de $\frac{\pi}{20}$ avec une approximation aussi grande que l'on voudra.

*Questions proposées.*

**1.** La circonférence de rayon 1 étant partagée en trente parties égales, trouver les longueurs des droites qui joignent l'un des points de division à tous les autres.

**2.** Démontrer que si $a$, $b$, $c$ sont trois arcs dont la somme est égale à $\pi$, on a :

1°. $\cot\frac{a}{2} + \cot\frac{b}{2} + \cot\frac{c}{2} = \cot\frac{a}{2}\cot\frac{b}{2}\cot\frac{c}{2}$;

2°. $\sin a + \sin b + \sin c = 4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}$;

3°. $\sin 2a + \sin 2b + \sin 2c = 4\cos a \cos b \cos c$;

4°. $\cos 2a + \cos 2b + \cos 2c + 4\cos a \cos b \cos c + 1 = 0$;

5°. $\cos 4a + \cos 4b + \cos 4c + 1 = 4\cos 2a \cos 2b \cos 2c$;

6°. $\cos\frac{a}{2} + \cos\frac{b}{2} + \cos\frac{c}{2} = 4\cos\frac{\pi - a}{4}\cos\frac{\pi - b}{4}\cos\frac{\pi - c}{4}$;

7°. $\sin\frac{a}{2} + \sin\frac{b}{2} + \sin\frac{c}{2} - 1 = 4\sin\frac{\pi - a}{4}\sin\frac{\pi - b}{4}\sin\frac{\pi - c}{4}$;

8°. $\sin^2\frac{a}{2} + \sin^2\frac{b}{2} + \sin^2\frac{c}{2} + 2\sin\frac{a}{2}\sin\frac{b}{2}\sin\frac{c}{2} = 1$;

9°. $\sin^2 a + \sin^2 b + \sin^2 c - 2\cos a \cos b \cos c = 2$;

10°. $\sin^2 2a + \sin^2 2b + \sin^2 2c + 2\cos 2a \cos 2b \cos 2c = 0$.

3. Démontrer que

$$\sin a + \sin b + \sin c - 4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2}$$

$$= \sin\frac{a+b+c-\pi}{4}\left(\begin{array}{l}\cos\frac{3a-b-c-\pi}{4} + \cos\frac{3b-c-a-\pi}{4} \\ + \cos\frac{3c-a-b-\pi}{4} + \cos\frac{a+b+c-\pi}{4}\end{array}\right),$$

quels que soient les arcs $a$, $b$, $c$.

# LIVRE TROISIÈME.

## CONSTRUCTION DES TABLES DE FONCTIONS CIRCULAIRES.

**Propositions préliminaires. — Théorèmes qui résultent des propositions précédentes. — Division de la circonférence. — Construction d'une Table de sinus et cosinus. — Tables des logarithmes des fonctions circulaires. — Disposition des Tables de Callet. — Usage des Tables. — Developpements sur une application des Tables de fonctions circulaires.**

---

**78.** Pour faire usage des fonctions circulaires, il faut qu'on puisse calculer les valeurs des lignes trigonométriques d'un arc donné, et réciproquement trouver la valeur d'un arc quand on connaît l'une de ses lignes trigonométriques. Pour arriver à ce but, il est indispensable de construire d'abord une Table qui donne immédiatement les valeurs des lignes trigonométriques correspondantes à des valeurs successives de l'arc comprises entre o et $\frac{\pi}{2}$, et dont l'intervalle soit suffisamment petit. Nous allons indiquer par quels procédés on peut construire une pareille Table; on verra ensuite comment, à l'aide de cette Table, on peut trouver les lignes trigonométriques d'un arc quelconque donné, et réciproquement trouver le plus petit arc positif correspondant à une ligne trigonométrique donnée.

La construction de la Table dont nous venons de parler repose sur quelques propositions très-utiles d'ailleurs dans un grand nombre de circonstances, et que nous allons exposer.

### *Propositions préliminaires.*

**79.** Théorème I. — *Tout arc compris entre o et $\frac{\pi}{2}$ est plus grand que son sinus et moindre que sa tangente.*

Soient $AM = x$ (*fig.* 6) un arc compris entre o et $\frac{\pi}{2}$, MP son sinus et AT sa tangente. Prolongeons MP jusqu'à sa rencontre en N avec la circonférence, et menons la tangente TI; on a

$$\text{arc MAN} > \text{MN}, \quad \text{et} \quad \text{arc AMI} < \text{AT} + \text{TI}.$$

Or l'arc $x$ est moitié de MAN ou de AMI, $\sin x$ est moitié de MN, et $\tang x$ est égale à chacune des lignes AT et TI; on a donc

$$x > \sin x \quad \text{et} \quad x < \text{tang}\, x,$$

ce qu'il fallait démontrer.

Remarque. — *La différence $x - \sin x$ est d'autant plus petite que $x$ est plus petit.*

Soit, en effet, $Am$ un arc moindre que AM, et dont le sinus est $mp$, menons $mh$ parallèle à OA; on a évidemment $Mh <$ corde $Mm$, et, à fortiori,

$$Mh < \text{arc } Mm,$$

c'est-à-dire

$$\text{MP} - mp < \text{arc AM} - \text{arc } Am,$$

ou

$$\text{arc } Am - mp < \text{arc AM} - \text{MP},$$

ce qu'il fallait démontrer.

**80.** Théorème II. — *Si l'arc $x$ décroît de $\frac{\pi}{2}$ à o, le rapport $\frac{\sin x}{x}$, qui est constamment moindre que 1, augmente et s'approche indéfiniment de l'unité.*

1°. Je dis que si $x$ décroît de $\frac{\pi}{2}$ à o, le rapport $\frac{\sin x}{x}$ augmente, ou, en d'autres termes, que l'on a

$$\frac{\sin x}{x} > \frac{\sin(x+h)}{x+h},$$

si $x$ et $h$ sont positifs et que $x + h$ soit inférieur à $\frac{\pi}{2}$.

En développant $\sin(x+h)$, cette inégalité prend la forme

$$(x+h)\sin x > x(\cos h \sin x + \sin h \cos x),$$

ou, en divisant par $\cos x$,

$$(x+h)\,\mathrm{tang}\, x > x(\cos h\,\mathrm{tang}\, x + \sin h),$$

ou

$$x\,\mathrm{tang}\, x(1-\cos h) + h\,\mathrm{tang}\, x - x\sin h > 0,$$

ou, en divisant par $xh$,

$$\mathrm{tang}\, x\,\frac{1-\cos h}{h} + \left(\frac{\mathrm{tang}\, x}{x} - \frac{\sin h}{h}\right) > 0,$$

et on en reconnaît immédiatement l'exactitude, car $1-\cos h$ est positif, et $\frac{\mathrm{tang}\, x}{x} - \frac{\sin h}{h}$ l'est également, puisque la première fraction est plus grande que 1, et la seconde plus petite (n° 79).

2°. Je dis que si $x$ décroît jusqu'à zéro, on aura

$$\lim \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \text{pour} \quad x = 0.$$

En effet, à cause de $\mathrm{tang}\, x = \frac{\sin x}{\cos x}$, on peut écrire (n° 79)

$$\sin x < x < \frac{\sin x}{\cos x},$$

ou, en divisant par $\sin x$,

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}.$$

Il suit de là que le rapport $\frac{x}{\sin x}$ est compris entre l'unité et la fraction $\frac{1}{\cos x}$ dont la limite est l'unité pour $x = 0$; on a donc

$$\lim \frac{x}{\sin x} = 1 \quad \text{ou} \quad \lim \frac{\sin x}{x} = 1.$$

81. Théorème III. — *La différence entre un arc plus petit que $\frac{\pi}{2}$ et son sinus est moindre que le quart du cube de l'arc.*

Soit $x$ un arc moindre que $\frac{\pi}{2}$; on a (n° 79)

$$\tang \frac{x}{2} > \frac{x}{2},$$

ou

$$\sin \frac{x}{2} > \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2},$$

d'où, en multipliant par $2 \cos \frac{x}{2}$,

$$\sin x > x \cos^2 \frac{x}{2} > x - x \sin^2 \frac{x}{2},$$

ou

$$x - \sin x < x \sin^2 \frac{x}{2}.$$

Mais on a

$$\sin \frac{x}{2} < \frac{x}{2}, \quad \sin^2 \frac{x}{2} < \frac{x^2}{4};$$

on a donc, à fortiori,

$$x - \sin x < \frac{x^3}{4},$$

ce qu'il fallait démontrer.

*Remarque.* — On a ainsi deux limites, savoir $x$ et $x - \frac{x^3}{4}$, entre lesquelles est compris $\sin x$. On peut en déduire facilement deux limites entre lesquelles se trouve compris $\cos x$; on a, en effet,

$$\cos x = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2},$$

et, comme $\sin \frac{x}{2}$ est compris entre $\frac{x}{2}$ et $\frac{x}{2} - \frac{x^3}{32}$, on a d'abord

$$\cos x > 1 - \frac{x^2}{2},$$

puis

$$\cos x < 1 - 2\left(\frac{x}{2} - \frac{x^3}{32}\right)^2,$$

$$< 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{16} - 2\left(\frac{x^3}{32}\right)^2,$$

et, à fortiori,

$$\cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{16}.$$

Ainsi $\cos x$ est compris entre $1 - \frac{x^2}{2}$ et $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{16}$.

*Théorèmes qui résultent des propositions précédentes.*

**82.** Les trois théorèmes qui précèdent suffisent pour l'objet que nous avons en vue, la construction d'une Table de fonctions circulaires; le lecteur pourra donc se dispenser d'étudier les suivants, que nous avons cru cependant devoir présenter ici comme des exercices curieux et utiles.

**Théorème IV.** — *Le rapport* $\frac{\sin x}{x}$ *est la limite vers laquelle converge le produit*

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{8}\ldots\cos\frac{x}{2^n},$$

*lorsque l'entier n augmente indéfiniment.*

On a, en effet,

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2},$$

$$\sin\frac{x}{2} = 2\sin\frac{x}{4}\cos\frac{x}{4},$$

$$\sin\frac{x}{4} = 2\sin\frac{x}{8}\cos\frac{x}{8},$$

.................

.................

$$\sin\frac{x}{2^{n-1}} = 2\sin\frac{x}{2^n}\cos\frac{x}{2^n}:$$

multipliant ces égalités entre elles, et supprimant les facteurs

communs, il vient

$$\sin x = 2^n \sin \frac{x}{2^n} . \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cos \frac{x}{8} \ldots \cos \frac{x}{2^n},$$

et, en divisant par $x$,

$$\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin \frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}} . \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cos \frac{x}{8} \ldots \cos \frac{x}{2^n}.$$

Or, lorsque $n$ croît indéfiniment, $\frac{x}{2^n}$ tend vers zéro, quel que soit l'arc donné $x$; donc le rapport

$$\frac{\sin \frac{x}{2^n}}{\frac{x}{2^n}}$$

a pour limite l'unité, et l'on a

$$\frac{\sin x}{x} = \lim \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cos \frac{x}{8} \ldots \cos \frac{x}{2^n}, \quad \text{pour} \quad n = \infty,$$

ce qu'il fallait démontrer.

83. Théorème V. — *La différence entre un arc plus petit que $\frac{\pi}{2}$ et son sinus est moindre que le sixième du cube de cet arc.*

Nous avons trouvé (n° 81)

$$\cos x > 1 - \frac{x^2}{2},$$

on déduit de là

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} &\cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cos \frac{x}{8} \ldots \cos \frac{x}{2^n} \\ &\qquad > \left(1 - \frac{x^2}{2^3}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^5}\right) \cdots \left(1 - \frac{x^2}{2^{2n+1}}\right). \end{aligned} \right.$$

Je dis que l'on a, à fortiori,

$$(2) \quad \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \cos \frac{x}{8} \ldots \cos \frac{x}{2^n} > 1 - \left(\frac{x^2}{2^3} + \frac{x^2}{2^5} + \ldots + \frac{x^2}{2^{2n+1}}\right),$$

ou

(3) $$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{8}\ldots\cos\frac{x}{2^n} > 1 - \left(\frac{x^2}{6} - \frac{x^2}{3\;2^{2n+1}}\right).$$

En effet, en faisant $n = 2$, dans l'inégalité (1), il vient

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4} > \left(1 - \frac{x^2}{2^3}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^5}\right),$$

et, à fortiori,

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4} > 1 - \frac{x^2}{2^3} - \frac{x^2}{2^5};$$

on a, par suite,

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cos\frac{x}{8} > \left(1 - \frac{x^2}{2^3} - \frac{x^2}{2^5}\right)\left(1 - \frac{x^2}{2^7}\right)$$

$$> 1 - \frac{x^2}{2^3} - \frac{x^2}{2^5} - \frac{x^2}{2^7}.$$

En continuant ainsi, on obtiendra l'inégalité (2), ou l'inégalité (3) qui exprime la même chose. L'inégalité (3) ayant lieu, quel que soit $n$, on aura à la limite, pour $n = \infty$,

$$\lim\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\ldots\cos\frac{x}{2^n} > 1 - \frac{x^2}{6},$$

ou (n° 82)

(4) $$\frac{\sin x}{x} > 1 - \frac{x^2}{6},$$

et

$$\sin x > x - \frac{x^3}{6},\quad x - \sin x < \frac{x^3}{6},$$

ce qu'il fallait démontrer.

*Remarque* I. — Il peut arriver que deux variables $u$ et $v$, qui tendent vers deux limites U et V, satisfassent constamment à l'inégalité

$$u > v,$$

et qu'à la limite on ait

$$U = V.$$

D'après cela on pourrait craindre que l'inégalité (3) n'entraîne pas

nécessairement l'inégalité (4), ou, en d'autres termes, qu'on n'ait, pour certaines valeurs de $x$,

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{6};$$

mais on verra que cela est impossible, si l'on considère que l'inégalité (3) a été obtenue en multipliant une suite d'inégalités dont les premières ne contiennent pas la lettre $n$, et demeurent toujours des inégalités même à la limite.

*Remarque* II. — On a, par ce qui précède, deux limites plus rapprochées que celles du n° 81, et entre lesquelles est compris $\sin x$; ces limites sont $x$ et $x - \frac{x^3}{6}$. Par un raisonnement identique à celui du n° 81, on déduit de là que $\cos x$ est compris entre les deux limites $1 - \frac{x^2}{2}$ et $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$. Ces limites de $\sin x$ et de $\cos x$ sont les plus rapprochées qu'on puisse assigner.

**84.** Théorème VI. — *La différence entre un arc moindre que $\frac{\pi}{2}$ et sa tangente est plus grande que le tiers du cube de l'arc.*

Soit $x$ un arc compris entre o et $\frac{\pi}{2}$; on a (n° 83)

$$\sin x > x - \frac{x^3}{6},$$

$$\cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24},$$

d'où, en divisant,

$$\operatorname{tang} x > \frac{x - \frac{x^3}{6}}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}}.$$

Effectuons la division indiquée dans le second membre, jusqu'à ce qu'on ait deux termes du quotient; il vient

$$\operatorname{tang} x > x + \frac{x^3}{3} + \frac{\frac{x^5}{8}\left(1 - \frac{x^2}{9}\right)}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}}.$$

Or $1 - \frac{x^2}{9}$ est positif si $x$ est $< 3$, et, à fortiori, si $x$ est $< \frac{\pi}{2}$; pareillement $1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$ est positif si $x$ est $< \sqrt{6 - \sqrt{12}}$ ou $\frac{1}{2}(3,18\ldots)$ et, à fortiori, si $x$ est $< \frac{\pi}{2}$; on a donc

$$\operatorname{tang} x > x + \frac{x^3}{3},$$

ou

$$\operatorname{tang} x - x > \frac{x^3}{3},$$

ce qu'il fallait démontrer.

85. Théorème VII. — *Tout arc compris entre* o *et* $\frac{\pi}{2}$ *est moindre que le tiers de sa tangente augmenté des deux tiers de son sinus.*

On a (nos 83, 84)

$$2x - 2\sin x < \frac{x^3}{3},$$

$$\operatorname{tang} x - x > \frac{x^3}{3};$$

on déduit de là

$$2x - 2\sin x < \operatorname{tang} x - x,$$

ou

$$x < \frac{1}{3}\operatorname{tang} x + \frac{2}{3}\sin x,$$

ce qu'il fallait démontrer.

## *Division de la circonférence.*

86. Jusqu'ici nous avons représenté les arcs par les nombres qui les mesurent; mais, dans les applications de la théorie des fonctions circulaires, on a trouvé plus commode de les évaluer en indiquant combien de fois ils contiennent une certaine partie aliquote de la circonférence. A cet effet, on est convenu de partager la circonférence entière

du cercle en 360 parties égales, auxquelles on a donné le nom de *degrés*, en sorte que la demi-circonférence renferme 180, et le quadrant 90 degrés. Chaque degré se subdivise en 60 *minutes*, et chaque minute en 60 *secondes*. Les degrés, minutes et secondes se représentent par $^{\circ}$, $'$, $''$. Ainsi un arc contenant 17 degrés 4 minutes 35 secondes et 7 dixièmes de seconde, sera représenté par

$$17^{\circ}\, 4'\, 35'',7.$$

Si $a$ désigne la longueur d'un arc, N le nombre de degrés qu'il renferme, on a la proportion

$$\frac{a}{\pi} = \frac{N}{180},$$

qui fera connaître l'un des nombres $a$ ou N quand l'autre sera connu.

Veut-on, par exemple, avoir le nombre de degrés contenu dans l'arc égal à 1, on aura

$$N = \frac{180}{\pi};$$

la valeur de $\frac{1}{\pi}$ est

$$\frac{1}{\pi} = 0,3183098\ldots,$$

et l'on trouve, à moins d'un centième de seconde,

$$N = 57^{\circ}\, 17'\, 44'',75.$$

*Construction d'une Table de sinus et cosinus.*

87. Tous les arcs pouvant, comme on l'a vu, être ramenés au premier quadrant, il suffit de connaître les lignes trigonométriques des arcs de 0 à 90 degrés. On peut même se borner aux arcs compris entre 0 et 45 degrés, car deux arcs complémentaires, comme $(45+\alpha)^{\circ}$ et $(45-\alpha)^{\circ}$, ont les mêmes lignes trigonométriques. En outre, si les sinus

et cosinus sont connus pour tous les arcs compris entre 0 et 45 degrés, les quatre autres lignes trigonométriques pourront se déterminer par les relations que nous avons fait connaître (n° 32).

Cela posé, proposons-nous de construire une Table des sinus et cosinus de tous les arcs de 10 en 10 secondes, depuis 0 jusqu'à 45 degrés.

88. *Sinus et cosinus de l'arc de 10 secondes.* — Désignons par $\varepsilon$ la longueur de l'arc de 10 secondes; on a, en observant qu'il y a 648 000 secondes dans la demi-circonférence,

$$\frac{\varepsilon}{\pi} = \frac{10}{648000},$$

d'où

$$\varepsilon = \frac{\pi}{64800};$$

d'ailleurs,

$$\pi = 3,14159\ 26535\ 89793\ 23846\ldots,$$

et l'on trouve

$$\varepsilon = 0,00004\ 84813\ 68110\ldots\ldots$$

Maintenant on a (n° 81)

$$\sin\varepsilon < \varepsilon \quad \text{et} \quad \sin\varepsilon > \varepsilon - \frac{\varepsilon^3}{4};$$

d'ailleurs

$$\frac{\varepsilon^3}{4} < 0,00000\ 00000\ 00032,$$

on a donc

$$\sin 10'' < 0,00004\ 84813\ 68110,$$
$$\sin 10'' > 0,00004\ 84813\ 68078.$$

Ces deux limites de $\sin 10''$ ont les douze premières décimales communes, et l'on voit qu'on a, à moins d'une demi-unité du treizième ordre décimal,

$$\sin 10'' = 0,00004\ 84813\ 681.$$

Pour avoir $\cos 10''$ ou $\cos \varepsilon$, on pourrait se servir de la formule $\cos \varepsilon = \sqrt{1 - \sin^2 \varepsilon}$; mais on arrive plus simplement au résultat, en se rappelant (nº 81) que l'on a

$$\cos \varepsilon > 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} \quad \text{et} \quad \cos \varepsilon < 1 - \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^4}{16}.$$

Comme $\varepsilon$ est $< 0,00005$ ou $< \frac{1}{2.10^4}$; on a

$$\frac{\varepsilon^4}{16} < \frac{1}{256.10^{16}},$$

et, à fortiori,

$$\frac{\varepsilon^4}{16} < \frac{1}{2.10^{18}};$$

d'où il suit que $1 - \frac{\varepsilon^2}{2}$ est une valeur de $\cos \varepsilon$ approchée à moins d'une demi-unité du dix-huitième ordre décimal. En se bornant aux treize premières décimales, on trouve

$$\cos 10'' = 0,99999\ 99988\ 248.$$

89. *Sinus et cosinus des arcs de* 10 *en* 10 *secondes, depuis* 0 *jusqu'à* 45 *degrés.* — *Formules de Thomas Simpson.*

Nous allons faire voir maintenant comment le sinus et le cosinus de l'arc de 10 secondes étant connus, on peut calculer les sinus et cosinus de tous les arcs de 10 en 10 secondes, depuis 0 jusqu'à 45 degrés. On pourrait, pour cela, se servir des formules

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \cos a \sin b,$$
$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b;$$

car le sinus et le cosinus de $10''$ étant connus, on aurait, par ces formules, le sinus et le cosinus de $20''$ en faisant $b = a = 10''$; on aurait ensuite le sinus et le cosinus de $30''$ en faisant, dans ces mêmes formules, $a = 20''$, $b = 10''$, et l'on continuerait de la sorte jusqu'à 45 degrés. Mais le pro-

cédé suivant, dû au géomètre anglais *Thomas Simpson*, conduit plus simplement au résultat.

Si, dans les formules

$$\sin(a+b)+\sin(a-b)=2\cos b\sin a,$$
$$\cos(a+b)+\cos(a-b)=2\cos b\cos a,$$

on pose $a=mb$, il vient

$$(1)\quad \begin{cases}\sin(m+1)b=2\cos b\sin mb-\sin(m-1)b,\\ \cos(m+1)b=2\cos b\cos mb-\cos(m-1)b.\end{cases}$$

Si l'on fait $b=10''$, et que l'on donne à $m$ les valeurs successives 1, 2, 3, etc., les formules (1) de Thomas Simpson donnent

$$\sin 20''=2\cos 10''\sin 10'',$$
$$\cos 20''=2\cos^2 10''-1,$$
$$\sin 30''=2\cos 10''\sin 20''-\sin 10'',$$
$$\cos 30''=2\cos 10''\cos 20''-\cos 10'',$$
..............................
..............................

On voit que généralement, quand on connaîtra les sinus et cosinus de deux multiples consécutifs de $10''$, les formules (1) feront connaître le sinus et le cosinus du multiple suivant. Mais on peut encore abréger ces laborieux calculs : le multiplicateur constant $2\cos 10''$ diffère peu de deux unités ; en posant

$$2\cos 10''=2-k,$$

on a (n° 88)

$$k=00000\ 00003\ 504\,;$$

alors les formules (1) deviennent

$$(2)\quad \begin{cases}[\sin(m+1)b-\sin mb]=[\sin mb-\sin(m-1)b]-k\sin mb,\\ [\cos(m+1)b-\cos mb]=[\cos mb-\cos(m-1)b]-k\cos mb.\end{cases}$$

Ces formules (2) serviront à calculer les différences

$$(3)\quad \begin{cases}\sin(m+1)b-\sin mb,\\ \cos(m+1)b-\cos mb,\end{cases}$$

6

à l'aide des différences précédentes,

$$(4)\qquad \begin{cases} \sin mb - \sin(m-1)b, \\ \cos mb - \cos(m-1)b, \end{cases}$$

qu'on a préalablement calculées, ainsi que $\sin mb$ et $\cos mb$. Ajoutant ensuite respectivement aux différences (3) les valeurs connues de $\sin mb$ et de $\cos mb$, on aura $\sin(m+1)b$ et $\cos(m+1)b$.

Les différences (3) se déduisent facilement des différences calculées (4); il suffit, en effet, d'en retrancher respectivement les produits $k \sin mb$ et $k \cos mb$, dont l'un des facteurs est constant, et ces produits se feront assez rapidement, si l'on a eu soin de former d'abord une Table des produits de $k$ par les neuf premiers nombres.

**90.** Lorsqu'on aura calculé, par la méthode précédente, les sinus et cosinus des arcs de 10 en 10 secondes, depuis 0 jusqu'à 30 degrés, on pourra obtenir les sinus et cosinus des arcs, compris entre 30 et 45 degrés, par la soustraction seulement.

En effet, en se rappelant que $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, on a (n° 44)

$$\sin(30^\circ + \alpha) + \sin(30^\circ - \alpha) = \cos\alpha,$$
$$\cos(30^\circ - \alpha) - \cos(30^\circ + \alpha) = \sin\alpha;$$

d'où l'on tire

$$(5)\qquad \begin{cases} \sin(30^\circ + \alpha) = \cos\alpha - \sin(30^\circ - \alpha), \\ \cos(30^\circ + \alpha) = \cos(30^\circ - \alpha) - \sin\alpha. \end{cases}$$

Ces formules (5) donnent le moyen de calculer les sinus et cosinus des arcs au-dessus de 30 degrés, lorsqu'on connaît les sinus et cosinus des arcs au-dessous de 30 degrés.

**91.** Quelque pénibles que soient les calculs dont nous venons de développer la marche, on conçoit la possibilité de

former, par leur moyen, la Table des sinus et cosinus de tous les arcs de 10 en 10 secondes, depuis 0 jusqu'à 45 degrés. Il y a lieu de penser toutefois que, dans le courant des calculs, les erreurs devront s'accumuler, et que les valeurs des sinus et cosinus calculés seront de moins en moins approchées. Or on a un moyen très-simple de déterminer le degré d'approximation que l'on aura atteint. Nous avons donné, en effet (n° 77), des formules qui permettent de calculer, avec une approximation aussi grande que l'on veut, les sinus et cosinus des multiples de l'arc $\frac{\pi}{20}$, c'est-à-dire de tous les arcs de 9 en 9 degrés, depuis 0 jusqu'à 90 degrés, en sorte qu'en comparant les résultats déduits de ces formules avec ceux obtenus par la méthode du n° 89, on jugera avec quelle approximation cette méthode a fait connaître les sinus et cosinus des arcs de 9 en 9 degrés, et, par suite aussi, les sinus et cosinus des arcs intermédiaires.

*Table des logarithmes des fonctions circulaires.*

**92.** Dans les applications numériques, on opère toujours par logarithmes; aussi a-t-on bien plutôt besoin de connaître les logarithmes des sinus, cosinus, etc., que ces lignes trigonométriques elles-mêmes. Or les sinus et cosinus des arcs de 10 en 10 secondes ayant été calculés, on pourra former la Table de leurs logarithmes. Cette Table une fois construite, on formera celle des logarithmes des tangentes et cotangentes à l'aide des formules

$$\log \operatorname{tang} x = \log \sin x - \log \cos x,$$
$$\log \cot x = \log \cos x - \log \sin x.$$

Quant aux sécantes et cosécantes, elles ne sont point employées; d'ailleurs leurs logarithmes sont égaux et de

signes contraires aux logarithmes des cosinus et sinus [*].

Les meilleures Tables de logarithmes des sinus, cosinus, etc., sont celles de Callet; nous allons en indiquer la disposition et l'usage, mais nous avons auparavant une remarque importante à faire.

Les sinus et cosinus des arcs de 0 à 90 degrés, les tangentes des arcs de 0 à 45 degrés, et les cotangentes des arcs de 45 à 90 degrés sont inférieurs à 1, en sorte que leurs logarithmes sont négatifs. On a voulu éviter, dans les Tables de Callet, l'emploi des caractéristiques négatives, et l'on a ajouté 10 à tous les logarithmes négatifs. C'est là un artifice de calcul, analogue à celui des compléments arithmétiques dont on fait un si grand usage.

*Disposition des Tables de Callet.*

93. La première de ces Tables contient les logarithmes des sinus et des tangentes de seconde en seconde pour les cinq premiers degrés avec sept décimales; mais le sinus ou la tangente d'un arc étant le cosinus ou la cotangente de son complément, cette Table donne aussi les logarithmes des cosinus et des cotangentes des arcs au-dessus de 85 degrés.

Les degrés sont marqués hors du cadre en haut et en bas de chaque page, les minutes occupent la première et la dernière ligne, et les secondes la première et la dernière colonne. Chaque page à gauche ne contient que des sinus et des cosinus, et chaque page à droite que des tangentes et des cotangentes, ainsi qu'on le voit par les titres de ces pages.

Les Tables suivantes contiennent les logarithmes des

[*] On trouvera, dans le livre sixième, des formules à l'aide desquelles on peut calculer directement, et avec l'approximation qu'on désire, les logarithmes des sinus, cosinus, tangentes et cotangentes de tous les arcs.

sinus, cosinus, tangentes et cotangentes de 10 en 10 secondes pour tous les degrés du quart de cercle. On y remarque les degrés écrits hors du cadre en haut et en bas de chaque page. Les minutes et secondes qu'on y voit à la première et à la seconde colonne se rapportent aux degrés qui sont écrits en haut; les minutes et secondes qu'on y trouve à la dernière et à l'avant-dernière colonne se rapportent aux degrés qui sont marqués au bas de la page.

La troisième colonne contient les logarithmes des sinus des arcs dont les degrés sont indiqués au haut de la page, et dont les minutes et les secondes sont marquées dans la première et dans la seconde colonne. La troisième colonne est intitulée sinus, mais il faut lire logarithmes des sinus. Il en est de même des autres. La quatrième colonne contient les différences des logarithmes des sinus, ainsi que son titre l'annonce : chaque nombre de cette colonne n'est pas dans l'alignement de ceux de la colonne précédente; ils se trouvent tous descendus d'une demi-ligne, et chacun d'eux exprime la différence qu'on aurait, si l'on soustrayait l'un de l'autre les deux logarithmes entre lesquels il se trouve. Les colonnes cinquième et sixième contiennent les logarithmes des cosinus des mêmes arcs et leurs différences; les colonnes septième et huitième contiennent les logarithmes des tangentes et leurs différences; enfin la neuvième colonne contient les logarithmes des cotangentes des mêmes arcs; leurs différences sont les mêmes que celles des logarithmes des tangentes : c'est pour cela qu'on a intitulé la colonne qui contient ces dernières, différences communes.

Si l'on ne considère que les degrés qui sont à la tête de chaque page, on croira que les Tables ne s'étendent que jusqu'à 45 degrés; mais si l'on observe que chaque colonne a deux titres; que la colonne marquée par en haut sinus,

est marquée par en bas cosinus; que celle qui est intitulée par en haut cosinus, est intitulée par en bas sinus; qu'il en est de même des tangentes et des cotangentes; on verra qu'en consultant les degrés, ainsi que les titres des colonnes qui sont en bas de chaque page, et les deux dernières colonnes vers la droite des mêmes pages, on aura les logarithmes des sinus, cosinus, tangentes et cotangentes des degrés, minutes et secondes depuis 45 jusqu'à 90 degrés.

*Usage des Tables.*

94. Nous allons développer la solution des deux problèmes que les Tables fournissent le moyen de résoudre.

PROBLÈME I. — *Connaissant le nombre de degrés, minutes et secondes d'un arc moindre que* 90 *degrés, trouver le logarithme du sinus, du cosinus, de la tangente ou de la cotangente de cet arc.*

*Premier cas.* — Si le nombre donné est composé de degrés, de minutes et de dizaines de secondes, on cherchera d'abord le nombre des degrés parmi ceux qui sont écrits en haut ou en bas des pages; en haut s'il est moindre que 45 degrés, au bas s'il est plus grand. On suivra la première colonne qui va en croissant de haut en bas, si le nombre des degrés se trouve en haut de la page, ou la dernière qui va en croissant de bas en haut, si le nombre des degrés se trouve en bas; on suivra, dis-je, l'une ou l'autre de ces colonnes dans le sens suivant lequel elle croît, jusqu'à ce qu'on rencontre le nombre des minutes données; on passera dans la colonne des secondes sans quitter la ligne des minutes trouvées; on suivra dans le même sens cette colonne, on y trouvera les dizaines de secondes, et sur la même ligne le logarithme du sinus, du cosinus, de la tangente et de la cotangente que l'on cherche.

Veut-on, par exemple, le logarithme de la tangente de

79° 51′ 40″; 79 degrés se trouvant au bas de la page, on montera le long de la dernière colonne qui va en croissant de bas en haut; on trouve 51 minutes dans cette colonne: on passe à la colonne précédente qui est celle des dizaines de secondes; on monte le long de cette colonne et l'on rencontre 40 secondes; sur la même ligne et dans la colonne marquée par en bas taugente, on trouve 0,7475657. C'est le logarithme cherché. On a ainsi

$$\log \operatorname{tang}(79^\circ 51' 40'') = 0,7475657.$$

Veut-on, pour second exemple, le logarithme du sinus de 2° 24′ 50″; 2 degrés se trouvant en haut de la page, on descend le long de la première colonne qui va en croissant de haut en bas; on trouve 24 minutes dans cette colonne: on passe à la colonne suivante qui est celle des dizaines de secondes; on descend le long de cette colonne et l'on trouve 50 secondes; sur la même ligne et dans la colonne intitulée par en haut sinus, on trouve 8,6244662. C'est le logarithme cherché, augmenté de 10 unités. On a ainsi

$$\log \sin(2^\circ 24' 50'') = \bar{2},6244662.$$

*Deuxième cas.* — Si le nombre donné contient en outre des unités de secondes et des fractions de secondes, on commencera par réduire les fractions de secondes en fraction décimale; on cherchera ensuite, comme nous venons de l'expliquer, le logarithme du sinus ou de la tangente de l'arc donné, en faisant abstraction des unités et des fractions décimales de secondes, dont nous désignerons l'ensemble par $n$. On prendra ensuite la différence $\Delta$ qui existe entre le logarithme trouvé et celui qui vient immédiatement après lui, en allant de haut en bas ou de bas en haut selon la marche que l'on suit; enfin on ajoutera au logarithme trouvé le nombre $x$ déterminé par la propor-

tion

$$\frac{n}{10} = \frac{x}{\Delta}, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{n\Delta}{10},$$

et l'on aura le logarithme cherché.

Si l'on veut le logarithme du cosinus ou de la cotangente de l'arc donné, on augmentera d'une dizaine le nombre des secondes de l'arc, et, après avoir supprimé les unités et fractions décimales de secondes, on obtiendra un arc qui surpassera l'arc donné d'une certaine fraction décimale $n$ de secondes, on cherchera le logarithme de son cosinus ou de sa cotangente, et l'on ajoutera $\frac{n\Delta}{10}$ au résultat, $\Delta$ étant ici la différence qui existe entre le logarithme trouvé et celui qui le précède immédiatement en allant de haut en bas ou de bas en haut, suivant la marche que l'on suit.

Ce qui précède repose sur le principe suivant :

*Si l'on donne successivement à un arc quelconque deux petits accroissements, les accroissements correspondants du log sin ou du log cos, etc., sont sensiblement proportionnels aux accroissements de l'arc.*

On démontre, en effet, par des considérations qui ne peuvent trouver place ici, que l'erreur commise dans l'application de ce principe ne peut, en général, avoir d'influence sur la septième décimale du logarithme, pourvu que, comme nous le supposons, les petits accroissements de l'arc n'excèdent pas 10 secondes.

Au lieu d'ajouter, comme nous l'avons indiqué, le produit $\frac{\Delta}{10} \times n$, on ajoute successivement le produit de $\frac{\Delta}{10}$ par les différents chiffres de $n$, en négligeant les chiffres de ces produits partiels qui ne peuvent avoir d'influence sur la septième décimale. On remarquera toutefois que si la huitième décimale doit surpasser 5, il est convenable d'augmenter la septième d'une unité.

Nous indiquerons par des exemples le type du calcul.

1°. *Trouver le logarithme de* sin $(49° 53' 24'',3)$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Log sin $(49° 53' 20'')$ = $\bar{1}$,8835459 | | | $\Delta$ = 177 unités du 7e ordre décimal. |
| Pour | $4''$ | 70,8 | |
| Pour | $0'',3$ | 5,31 | |

Log sin $(49° 53' 24'', 3)$ = $\bar{1}$,8835535

2°. *Trouver le logarithme de* cos $(36° 35' 36'',3)$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Log cos $(36° 35' 40'')$ = $\bar{1}$,9046481 | | | $\Delta$ = 156 |
| Pour | $3''$ | 46,8 | |
| Pour | $0'',7$ | 10,92 | |

Log cos $(36° 35' 36'', 3)$ = $\bar{1}$,9046538

3°. *Trouver le logarithme de* tang $(79° 51' 47'',2)$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Log tang $(79° 51' 40'')$ = 0,7475657 | | | $\Delta$ = 1215 |
| Pour | $7''$ | 850,5 | |
| Pour | $0'',2$ | 24,30 | |

Log tang $(79° 51' 47'', 2)$ = 0,7476532

4°. *Trouver le logarithme de* cot $(23° 17' 22'',3)$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Log cot $(23° 17' 30'')$ = 0,3660313 | | | $\Delta$ = 580 |
| Pour | $7''$ | 406,0 | |
| Pour | $0'',7$ | 40,60 | |

Log cot $(23° 17' 22'', 3)$ = 0,3660760

95. Problème II. — *Le logarithme d'un sinus, d'un cosinus, d'une tangente ou d'une cotangente étant donné, trouver le nombre de degrés, minutes et secondes de l'arc auquel il appartient.*

*Premier cas.* — On cherchera le logarithme donné dans l'une quelconque des deux colonnes qui ont pour titre la ligne trigonométrique à l'expression numérique de laquelle le logarithme donné appartient. Si on le trouve parmi ceux qu'elle contient, on observera dans quel bout de la colonne

est le titre qu'on a consulté : si ce titre est en haut, on jettera les yeux sur la seconde colonne à gauche, et dans l'alignement du logarithme on trouvera un nombre de dizaines qui exprimera les secondes de l'arc cherché. On passera à la première colonne ; si l'on y voit un nombre dans le même alignement, il sera celui des minutes cherchées, sinon on montera le long de cette colonne, et le premier nombre qu'on rencontrera sera celui des minutes ; enfin en haut de la page on trouvera hors du cadre le nombre de degrés demandé. Mais si le titre en question est au bas, il faut recourir à l'avant-dernière colonne vers la droite, qui donnera de même les secondes ; passer ensuite à la dernière colonne, sur laquelle on trouvera les minutes cherchées, soit dans la même ligne, soit en descendant le long de cette colonne. Enfin on trouvera au bas de la page, et hors du cadre, le nombre de degrés demandé.

Veut-on, par exemple, le nombre de degrés, minutes et secondes de l'arc dont le log sin est $\bar{1},3541803$ ; on cherchera ce logarithme dans l'une des deux colonnes qui sont intitulées sinus, sans s'embarrasser de savoir si ce titre est en haut ou en bas de la colonne ; l'ayant trouvé, on observe que le titre sinus est en haut de la colonne : on consulte la seconde colonne à gauche, et l'on trouve 50 dans l'alignement de 9,3541803 ; on passe à la première colonne, on n'y voit rien dans le même alignement ; mais en montant on rencontre 3 dans cette colonne ; enfin en haut de la page et hors du cadre, on trouve 13 degrés. Le nombre demandé est donc $13° 3' 50''$.

*Deuxième cas.* — Si le logarithme donné ne se trouve pas dans les Tables, ce qui est le cas le plus ordinaire, on cherchera les deux logarithmes entre lesquels il est compris ; on prendra celui de ces deux logarithmes qui est du côté du titre de la colonne dont on a besoin ; on le retranchera du logarithme donné, ou l'on en retranchera

celui-ci, selon que l'un sera plus grand ou plus petit que l'autre; on aura ainsi une différence D, et en appelant $\Delta$ la différence *tabulaire* des deux logarithmes entre lesquels est compris le logarithme donné, on déterminera le nombre $x$ par la proportion

$$\frac{D}{\Delta} = \frac{x}{10}, \quad \text{d'où} \quad x = \frac{10\,D}{\Delta}.$$

Le nombre $x$ moindre que 10 exprimera les unités de secondes et fractions de secondes renfermées dans l'arc cherché. Quant aux degrés, minutes et dizaines de secondes, on les obtient en substituant au logarithme donné celui de la Table qui en diffère de D, et nous avons expliqué plus haut le moyen de les trouver.

Nous indiquerons par des exemples le type du calcul.

1°. *Trouver l'arc dont le* log sin *est* $\bar{1}$,8835535.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Log sin $x$ = | $\bar{1}$,8835535 | | |
| Pour | $\bar{1}$,8835459 | 49° 53′ 20″ | $\Delta = 177$ |
| D × 10 | 760 | 4″,29 | |
| | $x$ = | 49° 53′ 24″,29 | |

2°. *Trouver l'arc dont le* log cos *est* $\bar{1}$,9046538.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Log cos $x$ = | $\bar{1}$,9046538 | | |
| Pour | $\bar{1}$,9046637 | 36° 35′ 30″ | $\Delta = 156$ |
| D × 10 | 990 | 6″ 3 | |
| | $x$ = | 36° 35′ 36″,3 | |

3°. *Trouver l'arc dont le* log tang *est* 0,7476532.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Log tang $x$ = | 0,7476532 | | |
| Pour | 0,7475657 | 79° 51′ 40″ | $\Delta = 1215$ |
| D × 10 | 8750 | 7″,2 | |
| | $x$ = | 79° 51′ 47″,2 | |

4°. *Trouver l'arc dont le* log cot *est* 0,3660760.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Log cot $x = 0{,}3660760$ | | | |
| Pour | 0,3660892 | 23° 17′ 20″ | $\Delta = 580$ |
| D × 10 | 1320 | 2″,28 | |
| | | $x = 23°\,17'\,22'',28$ | |

*Développements sur une application des Tables de fonctions circulaires.*

**96.** Pour que l'on puisse appliquer le calcul des logarithmes à la détermination de la valeur d'une expression numérique, il est nécessaire que cette expression ne contienne que des facteurs monômes; autrement on dit qu'elle n'est pas *calculable par logarithmes*. Si une expression ne contient d'autres facteurs polynômes que des sommes ou des différences de deux sinus ou de deux cosinus, ou de deux tangentes d'arcs donnés, on la rendra calculable par logarithmes en faisant usage des formules du n° 44 : aussi ces formules sont-elles d'une extrême importance. Mais il existe une méthode générale pour rendre calculable par logarithme une expression qui ne l'est pas; nous allons l'exposer avec détails.

Considérons d'abord une expression binôme

$$x = a + b,$$

et supposons qu'on veuille avoir log $x$; $a$ et $b$ sont des nombres positifs, dont les logarithmes seuls sont connus. On peut écrire

$$x = a\left(1 + \frac{b}{a}\right).$$

Cela posé, la méthode consiste à déterminer un arc auxiliaire $\varphi$, tel que l'on ait

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{b}{a};$$

cet arc $\varphi$, compris entre o et 90 degrés, se calculera par la formule

$$\log \operatorname{tang} \varphi = \log b - \log a,$$

ou, en opérant par compléments,

$$\log \operatorname{tang} \varphi = \log b + \operatorname{comp} \log a - 10.$$

La valeur de $x$ devient alors

$$x = a(1 + \operatorname{tang} \varphi) = a \frac{\cos \varphi + \sin \varphi}{\cos \varphi};$$

mais on a

$$\sin \varphi + \cos \varphi = \cos(90^\circ - \varphi) + \cos \varphi$$
$$= 2 \cos 45^\circ \cos(45^\circ - \varphi) = \sqrt{2} \cos(45^\circ - \varphi),$$

donc

$$x = \frac{a\sqrt{2}\cos(45^\circ - \varphi)}{\cos \varphi}.$$

Cette formule est calculable par logarithmes; on en tire

$$\log x = \log a + \frac{1}{2}\log 2 + \log \cos(45^\circ - \varphi)$$
$$+ \operatorname{comp} \log \cos \varphi - 10.$$

On opérera d'une manière semblable pour rendre calculable par logarithmes la formule

$$x = a - b;$$

on posera

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{b}{a},$$

d'où

$$\log \operatorname{tang} \varphi = \log b + \operatorname{comp} \log a - 10,$$

et la valeur de $x$ prend la forme

$$x = \frac{a\sqrt{2}\cos(45^\circ + \varphi)}{\cos \varphi}.$$

97. La méthode précédente s'applique à une expression polynôme quelconque $a \pm b \pm c \pm d, \ldots$; en effet, on pourra, par l'emploi d'un arc auxiliaire, réduire d'une

unité le nombre des termes de l'expression polynôme : avec un second arc auxiliaire, on diminuera encore ce nombre d'une unité, et l'on pourra continuer ainsi jusqu'à ce qu'on ait transformé l'expression en un monôme.

La transformation que nous venons d'indiquer n'est pas la seule qu'on puisse employer; nous exposerons encore la suivante.

On rendra calculable par logarithmes la formule $a+b$, où $a$ et $b$ sont des nombres positifs, en posant $\frac{b}{a}=\tang^2\varphi$; car on a

$$a+b=a(1+\tang^2\varphi)=\frac{a}{\cos^2\varphi}.$$

Si l'on a $a>b$, on rendra la formule $a-b$ calculable par logarithmes, en posant $b=a\sin^2\varphi$; car on a

$$a-b=a(1-\sin^2\varphi)=a\cos^2\varphi.$$

Bien d'autres transformations peuvent être employées suivant les cas. Nous donnerons deux exemples.

**98.** Problème I. — *On propose de calculer les racines, supposées réelles, de l'équation*

$$x^2-px+q=0,$$

*dans laquelle $p$ et $q$ sont des nombres positifs dont les logarithmes sont connus.*

En appelant $x'$ et $x''$ les deux racines, on a

$$x'=\frac{p}{2}+\sqrt{\frac{p^2}{4}-q},\qquad x''=\frac{p}{2}-\sqrt{\frac{p^2}{4}-q}.$$

Par hypothèse on a $q<\frac{p^2}{4}$; posons donc $q=\frac{p^2}{4}\sin^2\varphi$; l'arc $\varphi$ se calculera par la formule

$$\log\sin\varphi=\log 2+\frac{1}{2}\log q+\operatorname{comp}\log p-10,$$

et l'on aura

$$x' = \frac{p}{2}(1 + \cos\varphi) = p\cos^2\frac{1}{2}\varphi,$$

$$x'' = \frac{p}{2}(1 - \cos\varphi) = p\sin^2\frac{1}{2}\varphi.$$

Ces deux formules sont calculables par logarithmes.

99. Problème II. — *Trouver tous les arcs $x$ qui satisfont à l'équation*

$$a\sin x + b\cos x = c,$$

*où $a$, $b$, $c$ désignent des nombres donnés, positifs ou négatifs.*

On déterminera un arc auxiliaire $\varphi$ compris entre $-90^\circ$ et $+90^\circ$, et tel que l'on ait

$$\operatorname{tang}\varphi = \frac{b}{a};$$

l'équation proposée devient alors

$$a(\sin x + \operatorname{tang}\varphi\cos x) = c,$$

ou

$$\sin x\cos\varphi + \cos x\sin\varphi = \frac{c\cos\varphi}{a},$$

ou

$$\sin(x+\varphi) = \frac{c\cos\varphi}{a}.$$

On voit que le problème n'est possible que si $\frac{c\cos\varphi}{a}$ est compris entre $-1$ et $+1$ ; s'il en est ainsi, on calculera par les Tables un arc $x_0$ satisfaisant à l'équation précédente, et alors toutes les autres valeurs de $x$ seront données par les formules

$$x + \varphi = 2k.180^\circ + (x_0 + \varphi),$$
$$x + \varphi = (2k+1)180^\circ - (x_0 + \varphi),$$

ou

$$x = 2k.180^\circ + x_0,$$
$$x = (2k+1)180^\circ - 2\varphi - x_0,$$

formules dans lesquelles $k$ désigne un entier indéterminé positif, nul ou négatif.

*Questions proposées.*

1. Démontrer que si $x$ a une valeur déterminée, et que $h$ prenne des valeurs de plus en plus petites, on a pour $h=0$ :

$$\lim \frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\cos x,$$

$$\lim \frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=-\sin x,$$

$$\lim \frac{\operatorname{tang}(x+h)-\operatorname{tang} x}{h}=\frac{1}{\cos^2 x},$$

$$\lim \frac{\cot(x+h)-\cot x}{h}=-\frac{1}{\sin^2 x},$$

$$\lim \frac{\operatorname{séc}(x+h)-\operatorname{séc} x}{h}=\frac{\sin x}{\cos^2 x},$$

$$\lim \frac{\operatorname{coséc}(x+h)-\operatorname{coséc} x}{h}=\frac{-\cos x}{\sin^2 x}.$$

2. On partage l'arc $AM=2x$ en $\mu$ parties égales (*fig.* 3) et l'on demande, 1° de déterminer les distances du centre des moyennes distances des points de division aux diamètres AA' et BB'; 2° de prouver qu'à la limite, pour $\mu=\infty$, la distance du centre du cercle au centre des moyennes distances est égale à $\frac{\sin x}{x}$.

# LIVRE QUATRIÈME.

## TRIGONOMÉTRIE RECTILIGNE.

But de la trigonométrie rectiligne. — Mesure des angles. — Relations entre les angles et les côtés d'un triangle rectiligne. — Résolution des triangles rectangles. — Résolution des triangles quelconques. — Détermination de l'aire du triangle et des rayons des cercles inscrit et circonscrit. — Du quadrilatère inscriptible. — Exemples de résolution de triangles où les données ne sont pas toutes des côtés ou des angles. — Usage des fonctions circulaires dans la géométrie. — Applications numériques. — Opérations sur le terrain.

---

### *But de la trigonométrie rectiligne.*

**100.** Il y a dans un triangle six éléments à considérer, savoir, trois angles et trois côtés. *Résoudre* un triangle, c'est calculer les valeurs numériques de ses éléments, lorsqu'on a un nombre de données suffisant pour que le triangle soit déterminé.

La *trigonométrie rectiligne* a pour but la résolution des triangles rectilignes.

Les valeurs numériques des longueurs s'obtiennent en rapportant ces longueurs à une même unité : il nous reste à parler de la mesure des angles.

### *Mesure des angles.*

**101.** Soit un angle AOB (*fig.* 7); décrivons de son sommet comme centre, avec un rayon quelconque, une circonférence, et désignons par R et S les nombres d'unités contenues dans le rayon OA et dans l'arc AB intercepté par les côtés de l'angle. Le rapport $\frac{S}{R}$ est indépendant de la grandeur du rayon OA ; car si l'on décrit, du point O comme centre, une autre circonférence A'B', et qu'on dé-

signe par $R'$ et $S'$ les nombres qui mesurent le rayon $OA'$ et l'arc intercepté $A'B'$, on aura, par un théorème connu,

$$\frac{S}{R} = \frac{S'}{R'}.$$

Il résulte de là qu'en posant

$$\omega = \frac{S}{R},$$

le nombre $\omega$ ne dépend que de la grandeur de l'angle AOB; comme d'ailleurs l'angle AOB varie proportionnellement au nombre $\omega$, on peut prendre $\omega$ pour sa *mesure*. Pour $S = R$, $\omega$ se réduit à 1; par conséquent, $\omega$ représente le rapport de l'angle AOB à un certain angle qu'on peut choisir pour unité, et qui est tel que, si l'on décrit une circonférence de son sommet comme centre, avec un rayon quelconque, l'arc intercepté entre ses côtés est égal au rayon de la circonférence.

La formule $S = R\omega$ est très-fréquemment employée dans les applications géométriques; elle permet de comparer facilement des arcs qui appartiennent à des circonférences différentes.

Si l'on prend le rayon OA pour unité linéaire, on aura

$$R = 1 \quad \text{et} \quad \omega = S;$$

ainsi *un angle est mesuré par le même nombre que l'arc intercepté entre ses côtés par la circonférence décrite de son sommet comme centre, avec l'unité pour rayon*. Il y a donc, au point de vue abstrait, identité complète entre les angles et les arcs. Par exemple, le même nombre $\frac{\pi}{2}$ représentera indifféremment l'angle droit et le quadrant.

Et comme nous sommes convenus, dans les applications de la théorie des fonctions circulaires, de désigner aussi les arcs en indiquant combien ils renferment de degrés, mi-

nutes, secondes, etc., ces mêmes nombres de degrés désigneront également les angles correspondants.

Nous appellerons *sinus, cosinus, tangente, cotangente, sécante* et *cosécante d'un angle*, le sinus, le cosinus, la tangente, la cotangente, la sécante et la cosécante de l'arc intercepté par les côtés de l'angle sur la circonférence décrite de son sommet comme centre, avec l'unité pour rayon.

**102.** Nous désignerons toujours, dans ce livre, par A, B, C, *les nombres de degrés* contenus dans les trois angles d'un triangle, et par $a$, $b$, $c$, les nombres qui mesurent respectivement les côtés opposés.

*Relations entre les angles et les côtés d'un triangle rectiligne.*

103. Théorème I. — *Dans tout triangle rectangle, chaque côté de l'angle droit est égal à l'hypoténuse multipliée par le sinus de l'angle opposé, ou par le cosinus de l'angle adjacent.*

Soit ABC (*fig.* 8) un triangle rectangle en A; du point C comme centre, avec l'unité pour rayon, décrivons l'arc de cercle MN, et abaissons MP perpendiculaire sur AC : les triangles semblables ABC et PMC donnent les proportions

$$\frac{c}{a} = \frac{\mathrm{MP}}{\mathrm{CM}}, \quad \frac{b}{a} = \frac{\mathrm{CP}}{\mathrm{CM}}.$$

On a d'ailleurs

$$\mathrm{CM} = 1, \quad \mathrm{MP} = \sin \mathrm{C}, \quad \mathrm{CP} = \cos \mathrm{C};$$

donc il vient

$$c = a \sin \mathrm{C}, \quad b = a \cos \mathrm{C},$$

ce qu'il fallait démontrer.

Corollaire. — *La projection d'une droite finie sur une direction donnée, située avec elle dans un même plan, est égale au produit de la droite finie par le cosinus de l'angle aigu qu'elle forme avec la direction donnée.*

Soit $A'B'$ (*fig.* 9) la projection de AB sur $x'x$, menons AC parallèle à $x'x$; on aura $A'B' = AC$, et, à cause du théorème précédent,

$$A'B' = AB \cos BAC.$$

La proposition énoncée est donc démontrée, car BAC est égal à l'angle aigu que forme AB avec $x'x$.

104. Théorème II. — *Dans tout triangle rectangle, chaque côté de l'angle droit est égal à l'autre multiplié par la tangente de l'angle opposé ou par la cotangente de l'angle adjacent.*

En effet, soit A l'angle droit; on a, par le théorème précédent,

$$c = a \sin C, \quad b = a \cos C,$$

d'où, en divisant,

$$\frac{c}{b} = \operatorname{tang} C \quad \text{et} \quad c = b \operatorname{tang} C,$$

ou

$$c = b \cot B,$$

ce qu'il fallait démontrer.

105. *Remarque.* — Il ne saurait exister entre les angles et les côtés d'un triangle rectangle de relations distinctes des trois suivantes :

$$B + C = 90^\circ,$$
$$c = a \sin C, \quad b = a \cos C;$$

car s'il y en avait une, en y remplaçant $c$, $b$ et B par leurs valeurs $a \sin C$, $a \cos C$, et $90^\circ - C$, on aurait une équation non identique entre $a$ et C, ce qui est absurde.

En ajoutant les deux dernières des relations précédentes, après les avoir élevées au carré, on a la relation connue

$$c^2 + b^2 = a^2.$$

106. Théorème III. — *Dans tout triangle rectiligne, les côtés sont proportionnels aux sinus des angles opposés.*

Soit ABC (*fig.* 10) un triangle dont les angles B et C sont aigus; abaissons du sommet A la perpendiculaire AO sur la base BC : le point O tombe entre les points B et C, et les triangles rectangles ABO et ACO donnent (n° 103)

$$AO = c \sin B, \quad AO = b \sin C,$$

d'où

$$c \sin B = b \sin C, \quad \text{ou} \quad \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$$

ce qu'il fallait démontrer.

Si l'un des angles B ou C est obtus, C par exemple, le pied de la perpendiculaire AO tombe sur le prolongement de BC (*fig.* 11), et comme deux angles supplémentaires ont même sinus, les triangles rectangles ABO et ACO donnent encore $AO = c \sin B = b \sin C$, d'où l'on conclut, comme précédemment,

$$\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

107. *Autre démonstration.* — On peut encore démontrer ce théorème de la manière suivante. Circonscrivons un cercle au triangle ABC (*fig.* 12), menons le rayon OB et abaissons OPM perpendiculaire sur BC; enfin, du point O comme centre, avec l'unité pour rayon, décrivons l'arc $bm$ et abaissons $bp$ perpendiculaire sur OM : l'angle A est égal à l'angle BOM, lequel a pour sinus $bp$; on a donc

$$\sin A = bp.$$

Mais les triangles semblables BOP et $bop$ donnent

$$\frac{bp}{1} = \frac{BP}{OB} = \frac{BC}{2\,OB};$$

donc, en désignant par R le rayon du cercle circonscrit au triangle, on a

$$\sin A = \frac{a}{2R},$$

ce qui montre que *le sinus d'un angle d'un triangle est égal au rapport du côté opposé au diamètre du cercle circonscrit*. Enfin on déduit de là

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$$

ce qu'il fallait démontrer.

108. *Remarque.* — On a, d'après ce qui précède, les trois relations suivantes entre les angles et les côtés d'un triangle :

$$(1)\quad \begin{cases} A + B + C = 180^\circ, \\ \dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}; \end{cases}$$

or je dis qu'il n'en saurait exister une autre distincte de celles-là. En effet, à cause de

$$\sin A = \sin(180^\circ - B - C) = \sin(B + C),$$

on tire des équations (1)

$$A = 180^\circ - B - C,$$

$$b = \frac{a \sin B}{\sin(B + C)},$$

$$c = \frac{a \sin C}{\sin(B + C)}.$$

Si, maintenant, il existait, entre les angles et les côtés d'un triangle, une relation distincte des relations (1), en y mettant, au lieu de $A$, $b$, $c$, les valeurs que nous venons d'écrire, on aurait une équation non identique entre le côté $a$ et les deux angles adjacents $B$ et $C$, ce qui est absurde. Mais on peut déduire des équations (1) plusieurs autres relations importantes qui constituent autant de théorèmes qu'on peut établir directement. C'est cette marche que nous allons suivre, et nous montrerons ensuite comment les diverses relations que nous aurons trouvées peuvent se déduire les unes des autres.

109. Théorème IV. — *Dans tout triangle rectiligne, le carré d'un côté est égal à la somme des carrés des deux autres côtés, moins le double produit de ces deux autres côtés multiplié par le cosinus de l'angle qu'ils comprennent.*

Soit ABC (*fig* 10) un triangle dont l'angle C est aigu; abaissons du sommet A la perpendiculaire AO sur BC : on a

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2a \times CO;$$

mais le triangle rectangle ACO donne (n° 103)

$$CO = b \cos C,$$

on a donc

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

Si l'angle C du triangle est obtus (*fig.* 11), on a

$$c^2 = a^2 + b^2 + 2a \times CO;$$

le triangle rectangle ACO donne

$$CO = b \cos ACO = b \cos(180° - C) = -b \cos C,$$

donc on a

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C,$$

comme dans le premier cas. Enfin cette formule a lieu encore quand C est un angle droit; car, dans ce cas, cos C est nul, et elle se réduit à $c^2 = a^2 + b^2$.

*Corollaire.* — Le théorème précédent fournit les trois relations suivantes :

$$(2) \qquad \begin{cases} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A, \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B, \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C, \end{cases}$$

qui contiennent chacune les trois côtés et un angle.

110. Théorème V. — *Dans tout triangle rectiligne, un côté est égal à la somme des deux autres, multipliés chacun par le cosinus de l'angle qu'il forme avec le premier côté.*

Soit un triangle ABC (*fig.* 10 et 11); abaissons du sommet A la perpendiculaire AO sur BC : on a, si les deux angles B et C sont aigus,

$$a = BO + OC,$$

et si l'un des angles B et C, C par exemple, est obtus,

$$a = BO - OC.$$

Mais, dans le premier cas, $OC = b \cos C$, et dans le second, $OC = b \cos(180^\circ - C) = -b \cos C$; dans les deux cas, $BO = c \cos B$: donc on a

$$a = b \cos C + c \cos B,$$

ce qu'il fallait démontrer.

*Corollaire.* — Ce théorème fournit les trois relations

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} a = b \cos C + c \cos B, \\ b = c \cos A + a \cos C, \\ c = a \cos B + b \cos A. \end{array} \right.$$

**111.** Pour déduire les équations (3) des équations (2), ajoutons les deux premières équations (2); il vient, après les réductions,

$$c = a \cos B + b \cos A.$$

C'est l'une des équations (3); on obtiendrait les deux autres de la même manière.

Réciproquement, pour déduire les équations (2) des équations (3), ajoutons les équations (3); après les avoir multipliées respectivement par $a$, $b$, $-c$, il vient

$$a^2 + b^2 - c^2 = 2ab \cos C,$$

ou

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C.$$

C'est l'une des équations (2); on obtiendrait de même les deux autres.

**112.** Nous venons de voir que les systèmes (2) et (3) sont équivalents; nous allons indiquer comment on peut

déduire l'un de ces systèmes, (3) par exemple, des équations fondamentales (1).

La première des équations (1) donne

$$C = 180^\circ - (A + B),$$

d'où

$$\sin C = \sin (A + B) = \sin A \cos B + \sin B \cos A;$$

remplaçant sin A, sin B, sin C par les nombres proportionnels $a$, $b$, $c$, il vient

$$c = a \cos B + b \cos A.$$

C'est l'une des équations (3); on obtiendrait de même les deux autres.

**113.** *Les équations* (1) *peuvent se déduire des équations* (2) *ou* (3), *si l'on fait la restriction que la somme* $A+B+C$ *n'excède pas* 180 *degrés.* — En effet, on tire de la première des équations (2),

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

$$\sin^2 A = \frac{-a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2}{4b^2c^2};$$

par suite,

$$\frac{\sin^2 A}{a^2} = \frac{-a^4 - b^4 - c^4 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2 + 2b^2c^2}{4a^2b^2c^2}.$$

On trouvera évidemment la même valeur pour $\frac{\sin^2 B}{b^2}$ et $\frac{\sin^2 C}{c^2}$, car l'expression obtenue pour $\frac{\sin^2 A}{a^2}$ ne change pas quand on change les côtés $a$, $b$, $c$ les uns dans les autres; si donc on sait que A, B, C sont moindres que 180 degrés, leurs sinus étant positifs, on peut écrire

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}.$$

En second lieu, on peut éliminer $a$, $b$ et $c$ des équations (2) ou (3), car elles sont homogènes, et ne contiennent, si l'on

veut, que les rapports de deux côtés au troisième. Si, par exemple, on fait $b = ax$, $c = ay$, les équations (3) deviennent

$$y = x\cos A + \cos B,$$
$$x = y\cos A + \cos C,$$
$$1 = x\cos C + y\cos B,$$

et, en éliminant $x$ et $y$, on trouve

$$\cos^2 A + \cos^2 B + \cos^2 C + 2\cos A\cos B\cos C = 1\,;$$

si la somme des angles A, B, C n'excède pas 180 degrés, on conclut de là (nº 48)

$$A + B + C = 180^\circ.$$

### *Résolution des triangles rectangles.*

**114.** La résolution des triangles rectangles offre quatre cas distincts.

Premier cas. — *Étant donnés l'hypoténuse a et un angle aigu* B, *calculer l'angle* C *et les deux côtés b et c.*

L'angle C s'obtient immédiatement par la formule

$$C = 90^\circ - B;$$

on a ensuite

$$b = a\sin B,\quad c = a\cos B,$$

d'où l'on tire

$$\log b = \log a + \log\sin B,$$
$$\log c = \log a + \log\cos B.$$

Ces deux dernières formules serviront à calculer les côtés $b$ et $c$.

Deuxième cas. — *Étant donnés l'hypoténuse a et un côté b de l'angle droit, calculer le troisième côté c et les deux angles* B *et* C.

On a

$$b = a\sin B,\quad \text{d'où}\quad \sin B = \frac{b}{a},$$

et

$$\log \sin B = \log b - \log a = \log b + \text{comp} \log a - 10;$$

cette formule servira à calculer B. On aura ensuite

$$C = 90^\circ - B,$$

et enfin on déterminera $c$ par la formule

$$c = a \cos B,$$

qui donne

$$\log c = \log a + \log \cos B.$$

TROISIÈME CAS. — *Étant donnés l'un des côtés b de l'angle droit et l'un des angles aigus, calculer le second angle et les deux autres côtés.*

L'angle inconnu se déterminera immédiatement par la formule

$$B + C = 90^\circ.$$

Ensuite l'hypoténuse $a$ et le côté $c$ se calculeront à l'aide des formules

$$a = \frac{b}{\sin B}, \quad c = b \cot B,$$

qui donnent

$$\log a = \log b + \text{comp} \log \sin B - 10,$$
$$\log c = \log b + \log \cot B.$$

QUATRIÈME CAS. — *Étant donnés les deux côtés b et c de l'angle droit, calculer l'hypoténuse a et les deux angles aigus* B *et* C.

Pour déterminer l'angle B on prendra la formule

$$\text{tang}\, B = \frac{b}{c},$$

qui donne

$$\log \text{tang}\, B = \log b + \text{comp} \log c - 10;$$

on aura ensuite

$$C = 90^\circ - B,$$

et, enfin, on calculera l'hypoténuse $a$ par la formule

$$a = \frac{b}{\sin B},$$

qui donne

$$\log a = \log b + \text{comp} \log \sin B - 10.$$

*Résolution des triangles quelconques.*

**115.** La résolution des triangles rectilignes présente quatre cas distincts.

PREMIER CAS. — *Étant donnés le côté a et deux angles, calculer le troisième angle et les deux autres côtés.*

L'angle inconnu se calculera immédiatement par la formule

$$A + B + C = 180^\circ;$$

on déterminera ensuite les côtés $b$ et $c$ par les formules

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A}, \quad c = \frac{a \sin C}{\sin A},$$

qui donnent

$$\log b = \log a + \log \sin B + \text{comp} \log \sin A - 10,$$
$$\log c = \log a + \log \sin C + \text{comp} \log \sin A - 10.$$

**116.** DEUXIÈME CAS. — *Étant donnés deux côtés a et b, ainsi que l'angle* A *opposé au premier, calculer les angles* B *et* C *et le troisième côté c.*

On calculera l'angle B par la formule

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a},$$

qui donne

$$\log \sin B = \log b + \log \sin A + \text{comp} \log a - 10;$$

on aura ensuite

$$C = 180^\circ - (A + B),$$

et, enfin, on déterminera $c$ par la formule

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A},$$

qui donne

$$\log c = \log a + \log \sin C + \text{comp} \log \sin A - 10.$$

**117.** *Discussion.* — Si l'on a $a > b \sin A$, et seulement dans ce cas, les Tables feront connaître pour B une valeur $M < 90^\circ$, mais l'on pourra prendre aussi $B = 180^\circ - M$; on aura deux valeurs correspondantes de C :

$$C = 180^\circ - A - M, \quad C = M - A,$$

et, par suite, aussi deux valeurs correspondantes de $c$.

Pour que l'angle M réponde à la question, il faut et il suffit que $A + M$ soit $< 180$ degrés; pareillement, pour que $180^\circ - M$ y réponde, il faut et il suffit que M soit $> A$. Examinons dans quel cas ces conditions peuvent être remplies :

1°. Si l'on a $A =$ ou $> 90$ degrés, la valeur $180^\circ - M$ de B ne peut convenir, et la condition pour que la valeur M de B donne une solution du problème, est

$$M < 180^\circ - A,$$

ou, comme les deux membres sont moindres que 90 degrés,

$$\sin M < \sin (180^\circ - A) \quad \text{ou} \quad < \sin A,$$

c'est-à-dire

$$\frac{b \sin A}{a} < \sin A \quad \text{ou} \quad b < a.$$

On voit que le problème n'admet qu'une solution, et la condition pour qu'il en admette une, est que le côté opposé à l'angle donné soit le plus grand des deux côtés donnés.

2°. Si l'on a $A < 90^\circ$, la valeur M de B convient toujours; mais pour que l'on puisse prendre aussi $B = 180^\circ - M$, il faut que l'on ait

$$M > A,$$

ou, comme les deux membres sont inférieurs à 90 degrés,

$$\sin M > \sin A,$$

c'est-à-dire

$$\frac{b \sin A}{a} > \sin A \quad \text{ou} \quad b > a.$$

On voit que, dans ce cas, la condition de possibilité est $a > b \sin A$; si cette condition est remplie, le problème admet une ou deux solutions, suivant que le côté opposé à l'angle donné est plus grand ou plus petit que l'autre côté donné.

Les résultats qui précèdent sont conformes à ceux qu'on déduit de considérations géométriques que nous croyons inutile de rappeler ici.

118. *Remarque.* — Dans la solution précédente, on ne calcule le côté $c$ qu'après avoir calculé les angles B et C; or il se peut que, n'ayant pas besoin des angles B et C, on veuille calculer directement le côté $c$. Pour cela, on peut se servir de la formule

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A,$$

d'où l'on tire

$$c = b \cos A \pm \sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 A};$$

mais, pour rendre cette formule calculable par logarithmes, il faut employer un angle auxiliaire, conformément à la méthode du n° 96, et alors les calculs qu'on doit exécuter sont tous aussi longs que ceux auxquels conduit l'application de la première méthode. Il y a même plus; le moyen qui s'offre le plus naturellement pour rendre l'expression de $c$ calculable par logarithmes, consiste à poser (n° 98)

$$\frac{b \sin A}{a} = \sin \varphi, \quad \text{d'où} \quad b = \frac{a \sin \varphi}{\sin A},$$

car la valeur de $c$ devient alors

$$c = \frac{a \sin \varphi \cos A}{\sin A} \pm a \cos \varphi = \frac{a \sin(\varphi \pm A)}{\sin A},$$

et l'on voit que l'angle auxiliaire $\varphi$, dont on s'est servi, est précisément l'angle B du triangle. Il n'y a donc pas lieu de modifier la solution du n° 116.

**119.** Troisième cas. — *Étant donnés deux côtés a et b, ainsi que l'angle* C *compris entre ces côtés, calculer le troisième côté c et les deux angles* A *et* B.

On déterminera, comme il suit, les angles A et B. On a d'abord

$$A + B = 180^\circ - C,$$

et

$$\frac{\sin A}{\sin B} = \frac{a}{b};$$

on tire de là

$$\frac{\sin A - \sin B}{\sin A + \sin B} = \frac{a - b}{a + b}.$$

Mais on a (n° 44)

$$\frac{\sin A - \sin B}{\sin A + \sin B} = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(A - B)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(A + B)},$$

donc

$$\frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(A - B)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(A + B)} = \frac{a - b}{a + b};$$

d'ailleurs $\operatorname{tang} \frac{1}{2}(A + B) = \cot \frac{1}{2} C$, donc

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2}(A - B) = \frac{a - b}{a + b} \cot \frac{1}{2} C;$$

d'où, en supposant que $a$ soit $> b$,

$$\log \operatorname{tang} \frac{1}{2}(A - B) = \log(a - b) + \operatorname{comp} \log(a + b)$$
$$+ \log \cot \frac{1}{2} C - 10.$$

A l'aide de cette formule, on calculera $\frac{1}{2}(A - B)$, et comme $\frac{1}{2}(A + B) = 90^\circ - \frac{1}{2} C$, on en déduira les valeurs des angles A et B.

Pour avoir le côté $c$, on peut se servir de la formule

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A},$$

qui donne

$$\log c = \log a + \log \sin C + \text{comp} \log \sin A - 10;$$

mais, de cette manière, on a trois nouveaux logarithmes à prendre, tandis qu'on n'en a que deux nouveaux à chercher, si l'on opère comme il suit. On a

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{a+b}{\sin A + \sin B},$$

d'où

$$c = \frac{(a+b)\sin C}{\sin A + \sin B};$$

on a d'ailleurs (n° 44)

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{1}{2}(A + B) \cos \frac{1}{2}(A - B)$$

$$= 2 \cos \frac{1}{2} C \cos \frac{1}{2}(A - B),$$

$$\sin C = 2 \sin \frac{1}{2} C \cos \frac{1}{2} C,$$

donc

$$c = \frac{(a+b) \sin \frac{1}{2} C}{\cos \frac{1}{2}(A - B)},$$

et

$$\log c = \log (a+b) + \log \sin \frac{1}{2} C + \text{comp} \log \cos \frac{1}{2}(A - B) - 10.$$

**120.** *Remarque.* — Si l'on veut calculer directement le côté $c$, on se servira de la formule

$$c = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos C}.$$

Voici le moyen le plus simple de la rendre calculable par logarithmes. On a

$$\cos^2 \frac{1}{2} C + \sin^2 \frac{1}{2} C = 1,$$

$$\cos^2 \frac{1}{2} C - \sin^2 \frac{1}{2} C = \cos C,$$

on peut donc écrire

$$c=\sqrt{(a^2+b^2)\left(\cos^2\frac{1}{2}C+\sin^2\frac{1}{2}C\right)-2ab\left(\cos^2\frac{1}{2}C-\sin^2\frac{1}{2}C\right)},$$

$$=\sqrt{(a-b)^2\cos^2\frac{1}{2}C+(a+b)^2\sin^2\frac{1}{2}C};$$

par cette transformation, le nombre des termes, sous le radical, est réduit à deux. Maintenant on calculera un angle auxiliaire $\varphi$, tel que

$$\tang\varphi=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{1}{2}C,$$

et l'on aura

$$c=\frac{(a+b)\sin\frac{1}{2}C}{\cos\varphi}.$$

Cette formule est calculable par logarithmes, mais on voit que l'angle auxiliaire $\varphi$, qu'on doit préalablement calculer, n'est autre que $\frac{1}{2}(A-B)$; par conséquent, les calculs qu'exige cette seconde méthode sont identiques à ceux de la première. Nous avons cru cependant devoir l'indiquer pour donner un nouvel exemple des artifices par lesquels on parvient à rendre calculables par logarithmes des expressions qui ne le sont pas.

121. Quatrième cas. — *Étant donnés les trois côtés $a$, $b$, $c$, calculer les trois angles* A, B, C.

L'angle A est déterminé par la formule

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,$$

qui donne

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc};$$

cette formule ne se prête pas facilement au calcul des logarithmes, excepté dans le cas où $a$, $b$, $c$ sont des nombres d'un seul chiffre, mais on peut en déduire d'autres

formules qui permettent de calculer très-aisément l'angle A dans tous les cas.

On a (nº 59)

$$\cos^2 \frac{1}{2} A = \frac{1 + \cos A}{2}, \quad \sin^2 \frac{1}{2} A = \frac{1 - \cos A}{2},$$

et, en remplaçant cos A par sa valeur,

$$\cos^2 \frac{1}{2} A = \frac{2bc + b^2 + c^2 - a^2}{4bc} = \frac{(b+c)^2 - a^2}{4bc} = \frac{(a+b+c)(-a+b+c)}{4bc}$$

$$\sin^2 \frac{1}{2} A = \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{4bc} = \frac{a^2 - (b-c)^2}{4bc} = \frac{(a+b-c)(a-b+c)}{4bc}.$$

Soit maintenant, pour abréger,

$$a + b + c = 2p,$$

on aura

$$a + b - c = 2(p - c),$$
$$a - b + c = 2(p - b),$$
$$-a + b + c = 2(p - a),$$

et, par conséquent,

$$\cos^2 \frac{1}{2} A = \frac{p(p-a)}{bc}, \quad \sin^2 \frac{1}{2} A = \frac{(p-b)(p-c)}{bc};$$

on déduit de là

(1) $$\sin \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}},$$

(2) $$\cos \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}},$$

(3) $$\tan \frac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}.$$

Dans ces formules, il faut prendre le radical avec le signe +, car l'angle $\frac{1}{2}$ A étant aigu, ses lignes trigonométriques sont toutes positives. Chacune d'elles est calculable par logarithmes. On a pour les calculer les angles B et C des formules semblables, qu'on déduit des précédentes par de

simples changements de lettres, savoir :

$$\sin\frac{1}{2}B = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}, \qquad \sin\frac{1}{2}C = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}},$$

$$\cos\frac{1}{2}B = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}, \qquad \cos\frac{1}{2}C = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}},$$

$$\text{tang}\,\frac{1}{2}B = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}, \qquad \text{tang}\,\frac{1}{2}C = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}.$$

**122.** *Remarque* I. — Si l'on ne veut qu'un seul angle, A par exemple, on peut employer indifféremment l'une des formules (1), (2), (3); mais, si l'on a besoin des trois angles, on doit préférer la formule (3) et les deux autres semblables, car, en en faisant usage, on n'aura que quatre logarithmes à prendre, tandis que, si l'on employait la formule (1) ou la formule (2) et les deux semblables, on aurait sept logarithmes à chercher.

**123.** *Remarque* II. — Il faut qu'un triangle soit possible avec les côtés donnés $a$, $b$, $c$, pour que la valeur de tang $\frac{1}{2}$A soit réelle, ou que celles de sin $\frac{1}{2}$A et de cos $\frac{1}{2}$A soient réelles et moindres que 1. On peut retrouver cette condition sur les formules que nous venons de donner.

1°. Pour que la valeur de cos $\frac{1}{2}$A soit réelle, il faut que l'on ait $p > a$ ou $b + c > a$, c'est-à-dire que le côté $a$ soit moindre que la somme des deux autres; en outre, pour que la valeur de cos $\frac{1}{2}$A soit moindre que 1, il faut qu'on ait $p(p-a) > bc$, ou $(b+c)^2 - a^2 > 4bc$, ou $a^2 > (b-c)^2$, c'est-à-dire que le côté $a$ soit plus grand que la différence des deux autres.

2°. Pour que la valeur de sin $\frac{1}{2}$A soit réelle, il faut que les facteurs $p-b$, $p-c$ soient de même signe; ils ne

peuvent être négatifs, car leur somme est égale à $a$ : on a donc $p > b$ et $p > c$, c'est-à-dire $b < a + c$ et $c < a + b$; en outre, pour que la valeur de $\sin\frac{1}{2}A$ soit moindre que 1, il faut qu'on aît $(p-b)(p-c) < bc$, ou $a^2 - (b-c)^2 < 4bc$, ou $a^2 < (b+c)^2$, ou $a < b + c$. On retrouve ainsi la condition que chaque côté soit moindre que la somme des deux autres.

3°. Pour que la valeur de $\tang\frac{1}{2}A$ soit réelle, il faut que les trois facteurs $p - a$, $p - b$, $p - c$ soient positifs ou que deux d'entre eux soient négatifs; ce dernier cas ne pouvant avoir lieu, on retrouve la condition que chaque côté soit moindre que la somme des deux autres.

*Détermination de l'aire du triangle et des rayons des cercles circonscrit et inscrit.*

**124.** *Aire du triangle.* — On peut calculer l'aire d'un triangle quand on connaît trois de ses six éléments, pourvu que parmi eux se trouve au moins un côté. Nous allons examiner les quatre cas qui peuvent se présenter.

1°. *On donne deux côtés $a$ et $b$ avec l'angle compris C.*

Soit un triangle ABC (*fig.* 10 et 11), abaissons du sommet A la hauteur AO; on a, en désignant par $s$ l'aire du triangle,

$$s = \frac{1}{2} a \times AO.$$

Mais le triangle rectangle AOC donne $AO = b \sin C$, on a donc

$$s = \frac{1}{2} ab \sin C.$$

Ainsi *l'aire d'un triangle est égale à la moitié du produit de deux côtés multiplié par le sinus de l'angle compris entre ces côtés.*

2°. *On donne deux côtés a et b et l'angle A opposé à l'un d'eux.*

On commencera par calculer l'angle C (n° 116), et l'on se servira ensuite de la formule précédente.

3°. *On donne un côté a et les deux angles adjacents B et C.*

On a

$$s = \frac{1}{2} ab \sin C, \quad b = \frac{a \sin B}{\sin A} = \frac{a \sin B}{\sin (B + C)};$$

donc

$$s = \frac{1}{2} \frac{a^2 \sin B \sin C}{\sin (B + C)}.$$

4°. *On donne les trois côtés a, b, c.*

On a (n° 121)

$$\sin \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}, \quad \cos \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}};$$

donc

$$\sin C = 2 \sin \frac{1}{2} C \cos \frac{1}{2} C = 2 \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{ab}.$$

Remplaçant sin C par cette valeur, dans la formule $s = \frac{1}{2} ab \sin C$, il vient

$$s = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

où $p$ désigne le demi-périmètre $\frac{a+b+c}{2}$.

125. On déduit facilement de ce qui précède les formules suivantes, dignes d'être remarquées :

$$\sin \frac{1}{2} A \sin \frac{1}{2} B \sin \frac{1}{2} C = \frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{abc} = \frac{s^2}{pabc},$$

$$\cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} C = \frac{p\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{abc} = \frac{ps}{abc},$$

$$\text{tang} \frac{1}{2} A \,\text{tang} \frac{1}{2} B \,\text{tang} \frac{1}{2} C = \frac{s}{p^2}.$$

**126.** *Rayon du cercle circonscrit.* — Si R désigne le rayon du cercle circonscrit au triangle, on a (nº **107**)

$$R = \frac{a}{2 \sin A};$$

multipliant haut et bas par $bc$, il vient

$$R = \frac{abc}{2\,bc \sin A} = \frac{abc}{4s} = \frac{abc}{4\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}.$$

**127.** *Rayons des cercles inscrit et exinscrits.* — Soit $r$ le rayon du cercle inscrit ; en joignant le centre de ce cercle aux trois sommets, on décomposera le triangle en trois autres ayant $r$ pour hauteur commune, et pour bases les trois côtés $a$, $b$, $c$ respectivement ; on a donc $s = r\dfrac{a+b+c}{2}$, ou

$$s = pr \quad \text{et} \quad r = \frac{s}{p} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}.$$

Si l'on désigne par $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les rayons des cercles exinscrits au triangle, c'est-à-dire des cercles qui touchent respectivement les côtés $a$, $b$, $c$ et les prolongements des deux autres, il est aisé de voir que l'on a

$$s = (p-a)\alpha = (p-b)\beta = (p-c)\gamma;$$

d'où l'on tire

$$\alpha = \frac{s}{p-a} = \sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}},$$

$$\beta = \frac{s}{p-b} = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-c)}{p-b}},$$

$$\gamma = \frac{s}{p-c} = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)}{p-c}}.$$

On peut aussi écrire (nº **121**)

$$\alpha = p \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} A,$$
$$\beta = p \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} B,$$
$$\gamma = p \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} C.$$

Toutes ces formules sont calculables par logarithmes. On peut en déduire une multitude d'autres plus ou moins utiles. Nous nous bornons à citer les trois suivantes, qui sont assez remarquables :

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma},$$

$$s = \sqrt{r\alpha\beta\gamma},$$

$$4R = \alpha + \beta + \gamma - r.$$

*Du quadrilatère inscriptible.*

**128.** Nous indiquerons ici comment on peut calculer les angles, l'aire et les diagonales d'un quadrilatère inscriptible, quand on connaît les quatre côtés.

Soit ABCD un quadrilatère inscrit (*fig.* 13), dont nous représenterons les côtés AB, BC, CD, DA par $a$, $b$, $c$, $d$, les diagonales AC et BD par $x$ et $y$, l'aire par $s$, le rayon du cercle circonscrit par R, et les angles par les mêmes lettres qui désignent leurs sommets.

Les angles B et D étant supplémentaires ont des cosinus égaux et de signes contraires, et les triangles ABC et ACD donnent

$$(1) \qquad \begin{cases} x^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos B, \\ x^2 = c^2 + d^2 + 2cd\cos B. \end{cases}$$

On tire de ces équations, en éliminant $x$,

$$(2) \qquad \cos B = \frac{a^2 + b^2 - c^2 - d^2}{2(ab + cd)}.$$

Cette formule n'est pas calculable par logarithmes, mais on peut en déduire une qui le soit. On a

$$\sin^2 \frac{1}{2} B = \frac{1 - \cos B}{2}, \qquad \cos^2 \frac{1}{2} B = \frac{1 + \cos B}{2};$$

en remplaçant cos B par sa valeur, il vient

$$\sin^2\frac{1}{2}B = \frac{(c+d)^2-(a-b)^2}{4(ab+cd)} = \frac{(-a+b+c+d)(a-b+c+d)}{4(ab+cd)},$$

$$\cos^2\frac{1}{2}B = \frac{(a+b)^2-(c-d)^2}{4(ab+cd)} = \frac{(a+b-c+d)(a-b+c-d)}{4(ab+cd)}.$$

Désignons par $2p$ le périmètre $a+b+c+d$, on aura $a+b+c-d=2(p-d)$ etc., et, par suite,

$$(3)\qquad \begin{cases} \sin\frac{1}{2}B = \sqrt{\dfrac{(p-a)(p-b)}{ab+cd}}, \\ \cos\frac{1}{2}B = \sqrt{\dfrac{(p-c)(p-d)}{ab+cd}}. \end{cases}$$

En divisant ces formules (3) l'une par l'autre, on obtient la suivante :

$$(4)\qquad \operatorname{tang}\frac{1}{2}B = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{(p-c)(p-d)}},$$

qui est calculable par logarithmes. On aurait de même, pour calculer l'angle A,

$$(5)\qquad \operatorname{tang}\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(p-a)(p-d)}{(p-b)(p-c)}}.$$

Les angles du quadrilatère étant connus, on aura les diagonales par la méthode du n° 119. Quant à la surface $s$, elle est la somme des surfaces des triangles ABC et ADC; on a donc (n° 124)

$$s = \frac{1}{2}(ab+cd)\sin B;$$

on a d'ailleurs, en multipliant les équations (3),

$$\sin B = 2\frac{\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}{ab+cd},$$

donc

$$s = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)p-d)}.$$

Si l'on suppose que le côté $d$ se réduit à zéro, cette for-

mule donne celle qui exprime l'aire du triangle en fonction des trois côtés.

129. Si l'on veut calculer directement les diagonales $x$ et $y$, on portera, dans l'une des équations (1), la valeur de cos B tirée de l'équation (2); il vient alors

$$x^2 = \frac{cd(a^2+b^2)+ab(c^2+d^2)}{ab+cd},$$

ou

(6) $$x^2 = \frac{(ac+bd)(ad+bc)}{ab+cd};$$

on aurait de même

(7) $$y^2 = \frac{(ac+bd)(ab+cd)}{ad+bc}.$$

Mais ces formules (6) et (7) ne sont pas calculables par logarithmes.

En multipliant et en divisant les équations (6) et (7) l'une par l'autre, on a

(8) $$xy = ac+bd, \quad \frac{x}{y} = \frac{ad+bc}{ab+cd},$$

qui expriment deux théorèmes connus de géométrie.

On peut enfin exprimer le rayon R du cercle circonscrit en fonction des quatre côtés. On a, en effet (n° 107),

$$R = \frac{x}{2\sin B},$$

d'où

(9) $$R = \frac{\sqrt{(ac+bd)(ab+cd)(ad+bc)}}{4\sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}}.$$

130. *Aire d'un quadrilatère quelconque.* — On peut calculer aisément l'aire d'un quadrilatère quelconque, quand on connaît ses diagonales ainsi que l'angle qu'elles forment entre elles.

Soit ABCD (*fig.* 13) un quadrilatère quelconque; soient

$AC = a$, $BD = b$, $AOB = \alpha$ : on a

$$\text{aire } ABO = \frac{1}{2} AO . BO . \sin\alpha, \quad \text{aire } BCO = \frac{1}{2} CO . BO \sin\alpha,$$

et, en ajoutant,

$$\text{aire } ABC = \frac{1}{2} BO . a \sin\alpha;$$

on a de même

$$\text{aire } ADC = \frac{1}{2} DO . a \sin\alpha,$$

et, en ajoutant,

$$\text{aire } ABCD = \frac{1}{2} ab \sin\alpha.$$

Ainsi *l'aire d'un quadrilatère est égale à la moitié du produit des diagonales multiplié par le sinus de l'angle qu'elles forment entre elles.*

*Exemples de résolution de triangles où les données ne sont pas toutes des côtés ou des angles.*

**131.** Le nombre des problèmes qu'on peut se proposer sur la résolution des triangles est illimité. Nous allons citer quelques cas remarquables.

Problème I. — *Résoudre un triangle, connaissant un côté a, l'angle opposé A, et la somme ou la différence des deux côtés b et c.*

1°. Si c'est la somme $b + c$ qui est connue, on prendra la formule

$$\frac{b+c}{a} = \frac{\sin B + \sin C}{\sin A} = \frac{2 \sin \frac{1}{2}(B+C) \cos \frac{1}{2}(B-C)}{2 \sin \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} A} = \frac{\cos \frac{1}{2}(B-C)}{\sin \frac{1}{2} A},$$

qui permettra de calculer $\frac{1}{2}(B - C)$ : comme $B + C$ est connu, on en déduira B et C ; on achèvera ensuite la solution par la méthode du n° 115.

2°. Si c'est la différence $b - c$ qui est connue, on prendra

la formule

$$\frac{b-c}{a}=\frac{\sin B-\sin C}{\sin A}=\frac{2\sin\frac{1}{2}(B-C)\cos\frac{1}{2}(B+C)}{2\sin\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}A}=\frac{\sin\frac{1}{2}(B-C)}{\cos\frac{1}{2}A},$$

qui permettra de calculer $\frac{1}{2}(B-C)$; on achèvera comme dans le premier cas.

**132.** Problème II. — *Résoudre un triangle, connaissant le côté a, un angle adjacent* B, *et la somme ou la différence des deux autres côtés.*

1°. Supposons que la somme $b+c$ soit connue. Posons $a+b+c=2p$; $p$ et $p-a$ sont connus : or on a (n° **121**)

$$\operatorname{tang}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}},\quad \operatorname{tang}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}},$$

et, en multipliant,

$$\operatorname{tang}\frac{C}{2}\operatorname{tang}\frac{B}{2}=\frac{p-a}{p}.$$

On calculera C par cette formule, et l'on achèvera la solution comme au n° **115**.

2°. Supposons que la différence $b-c$ soit connue. Posons, comme précédemment, $a+b+c=2p$; $p-b$ et $p-c$ sont connus, et l'on a

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{C}{2}}{\operatorname{tang}\frac{B}{2}}=\frac{p-b}{p-c}.$$

Cette formule permettra de calculer l'angle C.

**133.** Problème III. — *Résoudre un triangle, connaissant la surface s et les angles.*

Nous avons donné (n° **124**) la formule

$$s=\frac{1}{2}a^2\frac{\sin B\sin C}{\sin A};$$

on en tire

$$a = \sqrt{\frac{2s \sin A}{\sin B \sin C}}.$$

On aura deux formules semblables pour calculer les côtés $b$ et $c$.

**134.** Problème IV. — *Résoudre un triangle, connaissant le périmètre et les angles.*

Nous avons donné (nº **125**) la formule

$$\frac{ps}{abc} = \cos\frac{1}{2}A \cos\frac{1}{2}B \cos\frac{1}{2}C;$$

en y remplaçant $s$ par $\frac{1}{2}bc \sin A$, ou $bc \sin\frac{1}{2}A \cos\frac{1}{2}A$, elle donne

$$a = \frac{p \sin\frac{1}{2}A}{\cos\frac{1}{2}B \cos\frac{1}{2}C}.$$

On calculera $a$ à l'aide de cette formule.

**135.** Problème V. — *Résoudre un triangle, connaissant le rayon $r$ du cercle inscrit et les angles.*

On déduit facilement, des formules précédemment données,

$$p - a = r\cot\frac{1}{2}A, \quad p - b = r\cot\frac{1}{2}B, \quad p - c = r\cot\frac{1}{2}C;$$

on calculera ainsi $p-a$, $p-b$, $p-c$, on en déduira ensuite les côtés $a$, $b$, $c$.

### *Usage des fonctions circulaires dans la géométrie.*

**136.** L'usage des fonctions circulaires n'est pas seulement borné au calcul numérique. Ces fonctions peuvent être employées avec succès pour la démonstration des théorèmes de géométrie, et même pour la solution des problèmes graphiques. Bien que cette application soit suffisam-

ment indiquée dans la géométrie analytique, nous ne croyons pas inutile d'en donner ici deux exemples très-simples.

Proposons-nous, en premier lieu, de démontrer ce théorème si connu :

*Toute transversale* A'B'C' (fig. 15) *détermine, sur les côtés d'un triangle* ABC, *six segments tels, que le produit de trois segments non consécutifs est égal au produit des trois autres.*

On a, dans les triangles AB'C', BC'A', CA'B', en remarquant que deux angles supplémentaires ont même sinus,

$$\frac{AC'}{AB'} = \frac{\sin AB'C'}{\sin AC'B'},$$

$$\frac{BA'}{BC'} = \frac{\sin AC'B'}{\sin BA'C'},$$

$$\frac{CB'}{CA} = \frac{\sin BA'C'}{\sin AB'C'},$$

et, en multipliant,

$$\frac{AC'}{AB'} \cdot \frac{BA'}{BC'} \cdot \frac{CB'}{CA'} = 1, \quad \text{ou} \quad AC'.BA',CB' = AB'.BC'.CA',$$

ce qu'il fallait démontrer.

**137.** Prenons encore ce second exemple. On sait que si le triangle ABC est rectangle en A (*fig.* 10), et qu'on mène AO perpendiculaire sur BC, on a la proportion

$$\frac{AB^2}{AC^2} = \frac{BO}{CO};$$

si le triangle n'est pas rectangle, mais si les côtés AB et AC sont égaux, la même proportion a lieu : on demande de prouver que ces deux cas sont les seuls où la proportion en question ait lieu.

A cause de $BO = c \cos B$ et $CO = b \cos C$, la proportion

donnée peut s'écrire ainsi :

$$\frac{c^2}{b^2} = \frac{c \cos B}{b \cos C}, \quad \text{ou} \quad \frac{c}{b} = \frac{\cos B}{\cos C};$$

on a d'ailleurs $\frac{c}{b} = \frac{\sin C}{\sin B}$, donc

$$\frac{\sin C}{\sin B} = \frac{\cos B}{\cos C}, \quad \text{ou} \quad \sin C \cos C = \sin B \cos B,$$

ou

$$\sin 2B = \sin 2C.$$

Les angles 2 B et 2 C ont ainsi même sinus, et comme leur somme est inférieure à 360 degrés, ils sont égaux ou supplémentaires; on a donc

$$B = C, \quad \text{ou} \quad B + C = 90°.$$

Dans le premier cas le triangle est isocèle, dans le second il est rectangle.

*Applications numériques.*

**138.** Il convient, dans les applications numériques, de prendre les logarithmes des sinus, cosinus, etc., tels qu'ils se trouvent dans les Tables de Callet, car il sera toujours facile de rétablir leurs véritables valeurs aux caractéristiques des logarithmes qu'on calcule. Il n'y a pas lieu, d'ailleurs, de redouter les erreurs qu'on commettrait en oubliant que certains logarithmes ont été augmentés de 10 unités, car une erreur de 10 unités sur le logarithme d'un nombre supprime ou introduit dans ce nombre un facteur égal à $10^{10}$, et l'on ne peut manquer de s'en apercevoir.

Nous allons donner un exemple de l'un des cas de la résolution des triangles rectangles, et un exemple de chacun des quatre cas que présentent les triangles quelconques.

PREMIER EXEMPLE. — *On donne*

$$A = 90^\circ;\quad B = 67^\circ 22' 48'',48;\quad a = 589^{m},251;$$

*et l'on demande de calculer* C, *b et c*.

On a d'abord $C = 90^\circ - B = 22^\circ 37' 11'',52$; voici le type du calcul des côtés $b$ et $c$ :

| *Calcul de b.* | | *Calcul de c.* | |
|---|---|---|---|
| $b = a \sin B$. | | $c = a \cos B$. | |
| $\log a$ .......... | 2,7703003 | $\log a$ .. ....... | 2,7703003 |
| $\log \sin B$ ....... | 9,9652375 | $\log \cos B$......... | 9,5850267 |
| $\log b$ .......... | 2,7355378 | $\log c$ .......... | 2,3553270 |
| $b = 543^{m},924$. | | $c = 226^{m},635$ | |

DEUXIÈME EXEMPLE. — *On donne*

$$A = 81^\circ 47' 12'',5;\quad B = 38^\circ 12' 47'',5;\quad a = 701^{m},224;$$

*et l'on demande de calculer* C, *b et c*.

On a d'abord $C = 180^\circ - A - B = 60^\circ$; voici le type du calcul des côtés $b$ et $c$ :

| *Calcul du côté b.* | | *Calcul du côté c.* | |
|---|---|---|---|
| $b = \dfrac{a \sin B}{\sin A}$. | | $c = \dfrac{a \sin C}{\sin A}$. | |
| $\log a$ .......... | 2,8458568 | $\log a$ .......... | 2,8458568 |
| comp log sin A... | 0,0044774 | comp log sin A... | 0,0044774 |
| $\log \sin B$ ....... | 9,7914024 | $\log \sin C$ ....... | 9,9375306 |
| $\log b$ . ........ | 2,6417366 | $\log c$ .......... | 2,7878648 |
| $b = 438^{m},265$ | | $c = 613^{m},571$ | |

TROISIÈME EXEMPLE. — *On donne*

$A = 27°47'44'',77$; $a = 219^m,912$; $b = 251^m,328$;

*et l'on demande de calculer* B, C *et* $c$.

*Calcul de l'angle* B.

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a}.$$

| | |
|---|---|
| log $b$ ..... ......... | 2,4002409 |
| comp log $a$ ..... .... | 7,6577510 |
| log sin A....... .... | 9,6686853 |
| log sin B ........... | 9,7266772 |

Il y a deux solutions :

$B = 32°12'15'',21$ et $B = 147°47'44'',79$.

PREMIÈRE SOLUTION.

$B = 32°12'15'',21$

*Calcul de l'angle* C.

$C = 180° - A - B.$

| | |
|---|---|
| | 180° |
| A = | 27°47'44",77 |
| B = | 32°12'15",21 |
| C = | 120° 0' 0",02 |

*Calcul du côté* $c$.

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

| | |
|---|---|
| log $a$ .......... | 2,3422490 |
| log sin C ....... | 9,9375313 |
| comp log sin A... | 0,3313147 |
| log $c$ .. ....... | 2,6110950 |

$c = 408^m,408.$

DEUXIÈME SOLUTION.

$B = 147°47'44'',79$

*Calcul de l'angle* C.

$C = 180° - A - B.$

| | |
|---|---|
| | 180° |
| A = | 27°47'44",77 |
| B = | 147°47'44",79 |
| C = | 4°24'30",44 |

*Calcul du côté* $c$.

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

| | |
|---|---|
| log $a$ ......... | 2,3422490 |
| log sin C ...... | 8,8857352 |
| comp log sin A.. | 0,3313147 |
| log $c$ ......... | 1,5592989 |

$c = 36^m,2492.$

QUATRIÈME EXEMPLE. — *On donne*

$a = 424^m,096$; $b = 371^m,084$; $C = 21°47'12''5$;

*et l'on demande de calculer* A, B *et* c.

*Calcul de l'angle* $\frac{1}{2}(A - B)$.

$$\tang \tfrac{1}{2}(A - B) = \frac{a-b}{a+b} \cot \tfrac{1}{2} C.$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $a - b$ . . . . . | 53,012 | $\log(a-b)$ . . . . . | 1,7243742 |
| $a + b$ . . . . . . | 795,180 | $\text{comp} \log(a+b)$ . . | 7,0995346 |
| $\frac{1}{2}$C. . . . . . . . . | 10°53′36″,25 | $\log \cot \frac{1}{2}$C. . . . . . . | 0,7156816 |
| | | $\log \tang \frac{1}{2}(A-B)$. . | 9,5395904 |
| | | $\frac{1}{2}(A-B) =$ | 19°6′23″,75 |

*Calcul des angles* A *et* B.

$\frac{1}{2}(A + B)$. . . . . . 79° 6′23″,75

$\frac{1}{2}(A - B)$. . . . . . 19° 6′23″,75

A = 98°12′47″,5.

B = 60°.

*Calcul du côté* c.

$$c = \frac{(a+b)\sin \frac{1}{2} C}{\cos \frac{1}{2}(A - B)}.$$

| | |
|---|---|
| $\log(a+b)$ . . . . . . . . . . . . . . | 2,9004654 |
| $\log \sin \frac{1}{2}$C. . . . . . . . . . . . | 9,2764213 |
| $\text{comp} \log \cos \frac{1}{2}(A - B)$. . . . | 0,0246099 |
| $\log c$ . . . . . . . . . . . . . . . . | 2,2014966 |

$c = 159^m,036$.

CINQUIÈME EXEMPLE. — *On donne*

$$a = 608^{m},775;\quad b = 1363^{m},656;\quad c = 949^{m}689;$$

*et l'on demande de calculer les angles* A, B, C, *et la surface s.*

*Calcul préliminaire.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| $p = \frac{a+b+c}{2}$ .... | 1461,060 | $\log p$ .......... | 3,1646683 |
| $p - a$ .......... | 852,285 | $\log(p-a)$ ..... | 2,9305849 |
| $p - b$ .......... | 97,404 | $\log(p-b)$ ..... | 1,9885768 |
| $p - c$ .......... | 511,371 | $\log(p-c)$ ..... | 2,7087361 |

*Calcul de l'angle* A.

$$\tan\tfrac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}.$$

| | |
|---|---|
| $\frac{1}{2}\log(p-b)$ ...... | 0,9942884 |
| $\frac{1}{2}\log(p-c)$ ...... | 1,3543680 |
| comp $\frac{1}{2}\log(p-a)$ .. | 8,5347076 |
| comp $\frac{1}{2}\log p$ ..... | 8,4176659 |
| log tang $\frac{1}{2}$A ...... | 9,3010299 |
| $\frac{1}{2}$A .... | 11°18′35″,75 |
| A = | 22°37′11″,50 |

*Calcul de l'angle* B.

$$\tan\tfrac{1}{2}B = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}.$$

| | |
|---|---|
| $\frac{1}{2}\log(p-a)$ ..... | 1,4652924 |
| $\frac{1}{2}\log(p-c)$ ..... | 1,3543680 |
| comp $\frac{1}{2}\log(p-b)$. | 9,0057116 |
| comp $\frac{1}{2}\log p$ ..... | 8,4176659 |
| log tang $\frac{1}{2}$B ...... | 0,2430379 |
| $\frac{1}{2}$B .... | 60°15′18″,40 |
| B = | 120°30′36″,80 |

*Calcul de l'angle* C.

$$\tan\tfrac{1}{2}C = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}.$$

| | |
|---|---|
| $\frac{1}{2}\log(p-a)$ ... | 1,4652924 |
| $\frac{1}{2}\log(p-b)$ ..... | 0,9942884 |
| comp $\frac{1}{2}\log(p-c)$. | 8,6456319 |
| comp $\frac{1}{2}\log p$ ..... | 8,4176659 |
| log tang $\frac{1}{2}$C ...... | 9,5228786 |
| $\frac{1}{2}$C .... | 18°26′5″,85 |
| C = | 36°52′11″,70 |

*Calcul de la surface.*

$$s = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}.$$

| | |
|---|---|
| $\frac{1}{2}\log p$ .......... | 1,5823341 |
| $\frac{1}{2}\log(p-a)$ ..... | 1,4652924 |
| $\frac{1}{2}\log(p-b)$ ..... | 0,9942884 |
| $\frac{1}{2}\log(p-c)$ ..... | 1,3543680 |
| log s .......... | 5,3962829 |
| s = | 249047$^{mc}$,9 |

Vérification $A + B + C = 180°$.

139. Comme exemple de calcul numérique, nous traiterons encore la question suivante :

*Quel doit être le rayon d'un cercle pour que la différence entre un arc de 10 mètres et sa corde soit plus petite que* $0^m,001$ ?

Désignons par R, $a$, $c$ les nombres de mètres contenus dans le rayon OM d'un cercle (*fig.* 6), dans l'arc MN, et dans la corde MN respectivement. Abaissons du centre O le rayon OA perpendiculaire en P sur MN, et appelons $\omega$ le nombre qui mesure l'angle MOP; on a (nos 101, 103)

$$\text{arc MA} = R\omega, \quad MP = R\sin\omega,$$

et, en multipliant par 2,

$$a = 2R\omega, \quad c = 2R\sin\omega,$$

d'où

$$a - c = 2R(\omega - \sin\omega).$$

Or on a (n° 81)

$$\omega - \sin\omega < \frac{\omega^3}{4};$$

donc

$$a - c < \frac{R\omega^3}{2},$$

ou, en mettant $\frac{a}{2R}$ au lieu de $\omega$,

$$a - c < \frac{a^3}{16R^2}.$$

Supposons maintenant $a = 10$; pour être assuré que $a - c$ est $< 0,001$, il suffit, en vertu de l'inégalité précédente, que l'on ait

$$\frac{10^3}{16R^2} = \text{ ou } < 0,001,$$

c'est-à-dire

$$R^2 = \text{ ou } > \frac{1000000}{16},$$

ou

$$R = \text{ ou } > \frac{1000}{4} = \text{ ou } > 250.$$

Ainsi, dans un cercle dont le rayon est égal ou supérieur à 250 mètres, la différence entre un arc de 10 mètres et sa corde est plus petite que 1 millimètre.

*Opérations sur le terrain.*

**140.** Nous allons traiter maintenant quelques questions qui se présentent fréquemment dans la pratique. La solution de ces questions exige que l'on mesure d'abord sur le terrain certaines longueurs et certains angles; on y parvient à l'aide d'instruments qu'il n'entre pas dans notre sujet de décrire, et pour lesquels on devra consulter les ouvrages spéciaux. Nous nous bornerons ici à indiquer les mesures qu'il faut prendre dans chacun de ces problèmes, et les calculs qu'on doit exécuter ensuite pour achever la solution.

**141.** Problème I. — *Trouver la distance d'un point* B (fig. 10) *à un point* A *inaccessible.*

On mesurera, à partir du point B, une *base* BC, et les angles ABC et ACB, formés par cette base, avec les rayons visuels dirigés de B et C vers A : on connaîtra alors, dans le triangle ABC, un côté et les deux angles adjacents, et l'on calculera le côté AB par la méthode du n° **115**.

*Remarque.* — Pour éviter les angles trop aigus, la base BC ne doit être prise ni trop grande ni trop petite.

**142.** Problème II. — *Trouver la hauteur d'un point au-dessus de l'horizon.*

Soit AS (*fig.* 16) la hauteur qu'il s'agit de mesurer. Si l'on peut approcher du pied A de la verticale AS, on prendra, sur le terrain supposé de niveau, une base AB que l'on mesurera; au point B, on placera l'instrument à l'aide

duquel on visera le point S du point C, on mesurera l'angle du rayon visuel CS avec la verticale C $z$, lequel est égal à l'angle DSC. Si donc on imagine DC parallèle à AB, on connaîtra, dans le triangle rectangle CDS, le côté CD = AB et l'angle aigu CSD; on calculera le côté SD, et, en ajoutant AD, qui est égal à la hauteur BC de l'instrument, on aura la hauteur cherchée.

Si l'on ne peut approcher du pied de la verticale AS, on prendra sur le terrain une base BE, on placera l'instrument en B, et, comme précédemment, on visera le point S du point C; on mesurera l'angle du rayon visuel CS avec la verticale C $z$, et celui que forme ce même rayon visuel avec l'horizontale CF parallèle à BE; puis, transportant l'instrument en E, on visera de même le point S du point F, et l'on mesurera l'angle du rayon visuel FS avec CF. On connaîtra ainsi, dans le triangle CSF, le côté CF = BE et les deux angles adjacents; on pourra donc calculer le côté SC : alors, dans le triangle rectangle CSD, on connaîtra l'hypoténuse SC et l'angle aigu CSD; on calculera SD, et, en ajoutant AD, on aura la hauteur cherchée.

143. Problème III. — *Trouver la distance de deux points inaccessibles.*

Soient A et B (*fig.* 14) les deux points inaccessibles dont on veut déterminer la distance.

On mesurera sur le terrain une base CD, et les angles ADC, BDC, ACD et BCD; si les quatre points A, B, C, D sont dans un même plan, l'angle ACB est la différence des angles ACD et BCD, sinon on devra mesurer directement cet angle. Cela posé, on connaît, dans chacun des triangles ACD et BCD, le côté CD et les deux angles adjacents, on pourra donc calculer les côtés AC et BC; en résolvant ensuite le triangle ACB, où l'on connaît les côtés AC et

BC, ainsi que l'angle compris, on aura la distance cherchée AB.

Voici le détail du calcul. Désignons par la notation habituelle les côtés et les angles du triangle ABC, et posons en outre $CD = \delta$; on aura, pour déterminer $\log a$ et $\log b$,

$$\log a = \log \delta + \log \sin BDC + \text{comp} \log \sin (BDC + BCD) - 10,$$

$$\log b = \log \delta + \log \sin ADC + \text{comp} \log \sin (ADC + ACD) - 10.$$

Il n'est pas nécessaire, comme on va voir, de calculer les côtés $a$ et $b$, leurs logarithmes suffisent. Résolvons le triangle ABC; on a (n° 119)

$$\text{tang} \frac{1}{2} (A - B) = \frac{a - b}{a + b} \cot \frac{1}{2} C.$$

Soit $\varphi$ un angle auxiliaire, tel que

$$b = a \,\text{tang}\, \varphi \quad \text{ou} \quad \text{tang}\, \varphi = \frac{b}{a};$$

on aura

$$\text{tang} \frac{1}{2} (A - B) = \frac{1 - \text{tang}\, \varphi}{1 + \text{tang}\, \varphi} \cot \frac{1}{2} C,$$

ou, à cause de $\text{tang}\, 45^\circ = 1$,

$$\text{tang} \frac{1}{2} (A - B) = \frac{\text{tang}\, 45^\circ - \text{tang}\, \varphi}{1 + \text{tang}\, 45^\circ \,\text{tang}\, \varphi} \cot \frac{1}{2} C = \text{tang}\, (45^\circ - \varphi) \cot \frac{1}{2} C.$$

Il suit de là que l'angle $\frac{1}{2} (A - B)$ peut être calculé par la formule

$$\log \text{tang} \frac{1}{2} (A - B) = \log \text{tang} (45^\circ - \varphi) + \log \cot \frac{1}{2} C;$$

l'angle auxiliaire $\varphi$ ayant été préalablement calculé par la formule

$$\log \text{tang}\, \varphi = \log b - \log a.$$

Connaissant la différence des angles A et B, et, par conséquent, ces angles eux-mêmes, on aura la distance cherchée $c$, par la formule

$$c = \frac{a \sin C}{\sin A}, \quad \log c = \log a + \log \sin C + \text{comp} \log \sin A - 10.$$

144. Problème IV. — *Trois points* A, B, C (fig. 17) *sont situés sur un terrain uni, et l'on demande d'y retrouver le point* M, *d'où les distances* AB *et* BC *ont été vues sous des angles connus* $\alpha$ *et* $\beta$.

Le point M est à l'intersection des segments capables des angles $\alpha$ et $\beta$, construits sur AB et BC respectivement.

Soient $AB = a$, $BC = b$, et prenons pour inconnues les angles $MAB = x$ et $MCB = y$. Les triangles AMB et CMB donnent

$$BM = \frac{a \sin x}{\sin \alpha}, \quad BM = \frac{b \sin y}{\sin \beta},$$

d'où

$$\frac{a \sin x}{\sin \alpha} = \frac{b \sin y}{\sin \beta},$$

et

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta}.$$

Soit $\varphi$ un angle auxiliaire, tel que

$$\text{tang}\,\varphi = \frac{b \sin \alpha}{a \sin \beta};$$

on aura

$$\frac{\sin x}{\sin y} = \text{tang}\,\varphi,$$

d'où

$$\frac{\sin x - \sin y}{\sin x + \sin y} = \frac{\operatorname{tang}\varphi - 1}{\operatorname{tang}\varphi + 1}$$

ou (n° 44)

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(x-y)}{\operatorname{tang}\frac{1}{2}(x+y)} = \frac{\operatorname{tang}\varphi - \operatorname{tang}45^\circ}{1 + \operatorname{tang}\varphi \operatorname{tang}45^\circ} = \operatorname{tang}(\varphi - 45^\circ).$$

On a d'ailleurs, en désignant par $\omega$ l'angle ABC,

$$x + y = 360^\circ - \alpha - 6 - \omega,$$

donc

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}(x-y) = \operatorname{tang}(\varphi - 45^\circ)\operatorname{tang}\left(180^\circ - \frac{\alpha + 6 + \omega}{2}\right).$$

A l'aide de cette formule, on calculera l'angle $\frac{1}{2}(x-y)$, et comme $x+y$ est connu, on aura les angles $x$ et $y$ qui déterminent la position du point M.

*Remarque.* — Si l'un des facteurs de tang $\frac{1}{2}(x-y)$ est nul sans que l'autre soit infini, les angles $x$ et $y$ sont égaux entre eux. Mais si le second facteur est infini, le premier est nul et la valeur de tang $\frac{1}{2}(x-y)$ se présente sous la forme $\frac{0}{0}$. On peut vérifier que, dans ce cas, le problème est effectivement indéterminé. En effet, la condition pour que

$$\operatorname{tang}\left(180^\circ - \frac{\alpha + 6 + \omega}{2}\right)$$

soit infinie est que

$$\alpha + 6 + \omega = 180^\circ,$$

c'est-à-dire que le quadrilatère ABCM soit inscriptible; par conséquent, les deux segments capables des angles $\alpha$ et $6$ dont l'intersection détermine le point M, coïncident. Alors

tang $(\varphi - 45^\circ)$ est nulle. En effet, $\tang \varphi = \frac{b}{\sin \beta} : \frac{a}{\sin \alpha}$; mais $\frac{b}{\sin \beta}$ et $\frac{a}{\sin \alpha}$ sont (nº 107) les diamètres des cercles circonscrits aux triangles ABM et ACM, et puisque ces deux cercles coïncident, on a $\tang \varphi = 1$, par suite $\varphi = 45^\circ$, et $\tang (\varphi - 45^\circ) = 0$.

*Questions proposées.*

1. Résoudre un triangle, connaissant la base, la hauteur, et la différence des angles à la base.

2. Résoudre un triangle, connaissant les trois hauteurs.

3. Résoudre un triangle, connaissant les rayons des cercles exinscrits.

4. Calculer l'aire d'un trapèze dont on connaît les quatre côtés.

5. Construire un triangle équilatéral dont les sommets reposent sur trois circonférences concentriques, ou sur trois droites parallèles situées ou non dans un même plan.

6. Par un point O, pris sur le prolongement du diamètre AB d'un cercle ayant C pour centre, on mène une sécante OMM', et l'on demande de démontrer que le produit $\tang \frac{1}{2} \text{MCO} . \tang \frac{1}{2} \text{M'CO}$ est constant, quelle que soit la sécante menée par O (*fig.* 18).

7. Quatre droites OP, OA, OQ, OB, issues d'un même point, sont coupées par une sécante PAQB; démontrer que le rapport $\frac{\text{PA}}{\text{PB}} : \frac{\text{QA}}{\text{QB}}$ a une valeur constante (*fig.* 19).

8. Quatre plans OP, OA, OQ, OB, menés par une même droite O, sont rencontrés par une sécante PAQB;

démontrer que le rapport $\frac{PA}{PB} : \frac{QA}{QB}$ a une valeur constante (*fig.* 19).

9. Trouver les surfaces des polygones réguliers de $n$ côtés inscrit et circonscrit au cercle de rayon $r$ en fonction de $n$ et $r$. En déduire les relations connues entre les surfaces des polygones réguliers inscrits et circonscrits de $n$ et $2n$ côtés.

# LIVRE CINQUIÈME.

## TRIGONOMÉTRIE SPHÉRIQUE.

**But de la trigonométrie sphérique. — Relations entre les angles et les côtés d'un triangle sphérique. — Méthode pour déduire des relations précédentes celles qui sont relatives aux triangles rectilignes. — Résolution des triangles sphériques rectangles. — Résolution des triangles sphériques obliquangles. — Formules de Delambre et de Néper. — Application des formules de Néper à la résolution des triangles sphériques. — Résolution d'un triangle sphérique dont les côtés sont très-petits par rapport au rayon de la sphère. — Applications de la trigonométrie sphérique.**

---

*But de la trigonométrie sphérique.*

145. La trigonométrie sphérique a pour but la résolution des triangles sphériques. Résoudre un triangle sphérique, c'est calculer les nombres de degrés, minutes, etc., que contiennent ses côtés et ses angles, quand on a un nombre de données suffisant pour que le triangle soit déterminé.

Quand on connaît les nombres de degrés contenus dans les côtés d'un triangle sphérique, on trouve facilement, si l'on en a besoin (nº 86), les rapports de ces côtés au rayon de la sphère.

Nous ne considérons que les triangles sphériques dont les côtés sont moindres que 180 degrés, en sorte que si ABC (*fig.* 20) est un triangle sphérique tracé sur une sphère dont le centre est O, en joignant ce point O aux trois sommets, on formera un angle trièdre dont les angles plans et les angles dièdres seront mesurés par les mêmes nombres (nº 101) que les côtés et les angles du triangle sphérique, pourvu qu'on prenne pour unité le rayon de la sphère.

Nous désignerons toujours, dans ce livre, par A, B, C les nombres de degrés contenus dans les angles d'un triangle, et par $a$, $b$, $c$ les nombres de degrés contenus respectivement dans les côtésop posés.

*Relations entre les angles et les côtés d'un triangle sphérique.*

146. *Relations entre les trois côtés et un angle.* — Soit ABC (*fig.* 20) un triangle sphérique tracé sur une sphère quelconque dont le centre est en O, et dont nous prenons le rayon pour unité. Nous supposerons que les côtés $b$ et $c$ sont moindres chacun que 90 degrés. Joignons le centre O aux trois sommets, et menons aux arcs AB, AC, les tangentes AD, AE qui rencontrent en D et E respectivement les rayons OB et OC prolongés. On a

$$\mathrm{AD} = \operatorname{tang} c, \quad \mathrm{OD} = \operatorname{séc} c, \quad \mathrm{AE} = \operatorname{tang} b, \quad \mathrm{OE} = \operatorname{séc} b,$$

et

$$\mathrm{DAE} = \mathrm{A}, \quad \mathrm{DOE} = a.$$

Cela posé, les triangles DAE et DOE donnent

$$\overline{\mathrm{DE}}^2 = \overline{\mathrm{AD}}^2 + \overline{\mathrm{AE}}^2 - 2\,\mathrm{AD}.\mathrm{AE}\cos\mathrm{DAE},$$

$$\overline{\mathrm{DE}}^2 = \overline{\mathrm{OD}}^2 + \overline{\mathrm{OE}}^2 - 2\,\mathrm{OD}.\mathrm{OE}\cos\mathrm{DOE},$$

d'où, en retranchant ces égalités l'une de l'autre,

$$(\overline{\mathrm{OD}}^2 - \overline{\mathrm{AD}}^2) + (\overline{\mathrm{OE}}^2 - \overline{\mathrm{AE}}^2) - 2\,\mathrm{OD}.\mathrm{OE}\cos\mathrm{DOE} + 2\,\mathrm{AD}.\mathrm{AE}\cos\mathrm{DAE} = 0,$$

ou, en remarquant que $\overline{\mathrm{OD}}^2 - \overline{\mathrm{AD}}^2 = \overline{\mathrm{OE}}^2 - \overline{\mathrm{AE}}^2 = 1$, et divisant par 2,

$$1 - \operatorname{séc} b \operatorname{séc} c \cos a + \operatorname{tang} b \operatorname{tang} c \cos \mathrm{A} = 0.$$

Mais

$$\operatorname{séc} b = \frac{1}{\cos b}, \quad \operatorname{séc} c = \frac{1}{\cos c},$$

$$\operatorname{tang} b = \frac{\sin b}{\cos b}, \quad \operatorname{tang} c = \frac{\sin c}{\cos c};$$

on a donc

$$1 - \frac{\cos a}{\cos b \cos c} + \frac{\sin b \sin c \cos A}{\cos b \cos c} = 0,$$

ou

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A.$$

Telle est la relation qui existe entre l'angle A et les trois côtés.

**147.** Nous avons supposé, dans la démonstration précédente, que les côtés $b$ et $c$ sont moindres que 90 degrés, mais la formule trouvée est générale.

En effet, supposons d'abord (*fig.* 21) $c > 90°$, mais $b < 90°$, et prolongeons les arcs de grands cercles AB et BC jusqu'à leur rencontre en B'; en faisant $AB' = c'$, $CB' = a'$, le triangle AB'C donne

$$\cos a' = \cos b \cos c' + \sin b \sin c' \cos B'AC,$$

car les côtés $c'$ et $b$ sont moindres que 90 degrés. En remplaçant $a'$, $c'$ et B'AC par leurs valeurs $180° - a$, $180° - c$, $180° - A$, et changeant les signes des deux membres, il vient

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

ce qui est la relation du n° **146**.

Supposons maintenant $b > 90°$ et $c > 90°$; prolongeons (*fig.* 22) les côtés AB et AC jusqu'à leur rencontre en A': en faisant $A'C = b'$, $A'B = c'$, le triangle A'BC donne

$$\cos a = \cos b' \cos c' + \sin b' \sin c' \cos A',$$

et, en remplaçant $b'$, $c'$ et A' par leurs valeurs $180° - b$, $180° - c$, A, il vient

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

ce qui est encore la relation du n° **146**.

Enfin cette relation est vraie encore, si l'un des côtés $b$ et $c$, ou tous deux, sont égaux à 90 degrés. Si les côtés $b$

et $c$ sont tous deux égaux à 90 degrés, elle devient

$$\cos a = \cos A;$$

et cette égalité est évidente, car, le point A étant le pôle du côté BC, on a $A = a$.

Supposons donc que le côté $c$ seul soit égal à 90 degrés; prenons sur l'arc AC (*fig.* 23) $AD = 90^\circ$, et menons l'arc de grand cercle BD. Si $BD = 90^\circ$, le point B est le pôle de l'arc AC; on a donc à la fois $a = 90^\circ$, $b = 90^\circ$, et aussi $A = 90^\circ$, car le triangle ABD est trirectangle: alors la relation du n° 146 se réduit à l'identité $0 = 0$. Si BD est différent de 90°, le triangle BDC donne

$$\cos a = \cos CD \cos BD + \sin CD \sin BD \cos CDB:$$

d'ailleurs

$$\cos CDB = 0, \cos CD = \cos \pm (90 - b) = \sin b, \cos BD = \cos A;$$

on a donc

$$\cos a = \sin b \cos A.$$

Or c'est précisément à cette formule que se réduit celle du n° 146 quand on y fait l'hypothèse $c = 90^\circ$. Cette dernière est donc démontrée dans tous les cas.

148. De la formule qu'on vient d'établir on en déduit deux autres semblables par de simples changements de lettres. On a donc les trois relations

$$(1) \quad \begin{cases} \cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A, \\ \cos b = \cos a \cos c + \sin a \sin c \cos B, \\ \cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C, \end{cases}$$

qu'on doit regarder comme les formules fondamentales de la trigonométrie sphérique. Il ne saurait, en effet, en exister une autre distincte de celles-là; car, autrement, en éliminant les angles A, B, C, à l'aide des formules (1), on aurait une relation non identique entre les trois côtés, ce

qui est absurde. Mais on peut, des relations (1), en déduire plusieurs autres qu'il est indispensable de connaître.

**149.** *Relations entre deux côtés et les deux angles opposés.* — Pour avoir une relation entre les côtés $a$, $b$ et les angles A et B, il suffit d'éliminer $c$ entre les deux premières des équations (1) ; mais on parvient plus simplement au résultat en opérant de la manière suivante.

La première des équations (1) donne

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c},$$

d'où

$$\sin^2 A = 1 - \cos^2 A = \frac{\sin^2 b \sin^2 c - (\cos a - \cos b \cos c)^2}{\sin^2 b \sin^2 c}$$

$$= \frac{(1 - \cos^2 b)(1 - \cos^2 c) - (\cos a - \cos b \cos c)^2}{\sin^2 b \sin^2 c}$$

$$= \frac{1 - \cos^2 c - \cos^2 b - \cos^2 a + 2 \cos a \cos b \cos c}{\sin^2 b \sin^2 c},$$

et, par conséquent,

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 a} = \frac{1 - \cos^2 c - \cos^2 b - \cos^2 a + 2 \cos a \cos b \cos c}{\sin^2 a \sin^2 b \sin^2 c}.$$

Cette valeur de $\frac{\sin^2 A}{\sin^2 a}$ ne change pas quand on y change les lettres $a$, $b$, $c$ les unes dans les autres, et, par conséquent, on a

$$\frac{\sin^2 A}{\sin^2 a} = \frac{\sin^2 B}{\sin^2 b} = \frac{\sin^2 C}{\sin^2 c};$$

enfin, comme les angles et les côtés d'un triangle sont moindres que 180°, on a

$$(2) \qquad \frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c},$$

ce qui exprime que *dans tout triangle sphérique, les sinus des angles sont proportionnels aux sinus des côtés opposés.*

**150.** *Relations entre deux côtés, l'angle compris par ces côtés et l'angle opposé à l'un d'eux.* — Pour obtenir une relation entre les côtés $a$, $b$ et les angles A et C, il suffit d'éliminer $c$ entre la première et la dernière des relations (1); on simplifie l'élimination en faisant usage des formules (2).

En éliminant $\cos c$ entre la première et la dernière des équations (1), on trouve

$$\cos a = \cos a \cos^2 b + \sin a \sin b \cos b \cos C + \sin b \sin c \cos A;$$

en faisant passer $\cos a \cos^2 b$ dans le premier nombre, remplaçant $1 - \cos^2 b$ par $\sin^2 b$ et divisant ensuite par $\sin a \sin b$, il vient

$$\cot a \sin b = \cos b \cos C + \frac{\sin c \cos A}{\sin a},$$

et, à cause de $\frac{\sin c}{\sin a} = \frac{\sin C}{\sin A}$, il vient

$$\cot a \sin b = \cos b \cos C + \sin C \cot A;$$

c'est la relation qu'il fallait obtenir.

On en déduit cinq autres semblables par de simples changements de lettres, et l'on a en résumé les six équations suivantes :

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \cot a \sin b &= \cos b \cos C + \sin C \cot A, \\ \cot b \sin a &= \cos a \cos C + \sin C \cot B, \\ \cot a \sin c &= \cos c \cos B + \sin B \cot A, \\ \cot c \sin a &= \cos a \cos B + \sin B \cot C, \\ \cot b \sin c &= \cos c \cos A + \sin A \cot B, \\ \cot c \sin b &= \cos b \cos A + \sin A \cot C. \end{aligned} \right.$$

**151.** *Relations entre un côté et les trois angles.* — On obtiendrait une relation entre $a$, A, B, C, en éliminant $b$ et $c$ des équations (1), mais on y arrive plus simplement en faisant usage du triangle polaire ou supplémentaire. Soient A', B', C' les angles et $a'$, $b'$, $c'$ les côtés du triangle sup-

plémentaire du proposé ; on a

$$\cos a' = \cos b' \cos c' + \sin b' \sin c' \cos A'.$$

Remplaçant $a'$, $b'$, $c'$, $A'$ par leurs valeurs $180^\circ - A$, $180^\circ - B$, $180^\circ - C$, $180^\circ - a$, et changeant les signes des deux membres, il vient

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a.$$

On déduit de là les trois nouvelles relations

$$(4)\quad \begin{cases} \cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a, \\ \cos B = -\cos A \cos C + \sin A \sin C \cos b, \\ \cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c. \end{cases}$$

**152.** *Cas particulier des triangles rectangles.* — Les angles aigus ou obtus d'un triangle sphérique sont appelés angles *obliques*. Lorsqu'un triangle sphérique n'a qu'un seul angle droit, le côté opposé s'appelle *hypoténuse*.

En faisant l'hypothèse $A = 90^\circ$ dans celles des relations (1), (2), (3), (4) qui contiennent l'angle A, on obtient les suivantes, qui sont particulières aux triangles rectangles :

$$(5)\quad \cos a = \cos b \cos c;$$

$$(6)\quad \begin{cases} \sin b = \sin a \sin B, \\ \sin c = \sin a \sin C; \end{cases}$$

$$(7)\quad \begin{cases} \tang b = \tang a \cos C, \\ \tang c = \tang a \cos B, \\ \tang b = \sin c \tang B, \\ \tang c = \sin b \tang C; \end{cases}$$

(8) [illegible] $= \cot B \cot C,$
[illegible] $\cos b \sin C,$

L'équation (5) [illegible]

*Dans un triangle sphériq*[illegible]

*l'hypoténuse est égal au produit des cosinus des deux autres côtés.*

Il en résulte que les cosinus des trois côtés sont positifs, ou que deux d'entre eux sont négatifs ; par conséquent,

*Dans tout triangle rectangle, les trois côtés sont moindres que 90 degrés, ou bien un seul de ces côtés est moindre que 90 degrés*

Les équations (6) expriment que :

*Dans tout triangle sphérique rectangle, le sinus de l'un des côtés de l'angle droit est égal au sinus de l'hypoténuse multiplié par le sinus de l'angle opposé.*

Les deux premières équations (7) expriment que :

*Dans tout triangle sphérique rectangle, la tangente de l'un des côtés de l'angle droit est égale à la tangente de l'hypoténuse multipliée par le cosinus de l'angle adjacent.*

Les deux dernières des équations (7) expriment que :

*Dans tout triangle sphérique rectangle, la tangente de l'un des côtés de l'angle droit est égal au sinus de l'autre côté, multiplié par la tangente de l'angle opposé au premier côté.*

Il en résulte que la tangente d'un angle oblique est de même signe que la tangente du côté opposé ; par conséquent, ce côté et cet angle sont de *même espèce*, c'est-à-dire qu'ils sont tous deux plus grands ou plus petits que 90 degrés.

La première des équations (8) exprime que :

*Dans tout triangle sphérique rectangle, le cosinus de l'hypoténuse est égal au produit d[illegible]angentes des deux angles obliques.*

Les deux dernières équation[illegible]t que :

*Dans tout triangle sp[illegible]le cosinus d'un angle oblique [illegible]al au [illegible] côté opposé, multiplié par le sin[illegible]ond angle oblique.*

### *Méthode pour déduire des relations précédentes celles qui sont relatives aux triangles rectilignes.*

**183.** Il se présente des questions où il est nécessaire de considérer les relations qui existent entre les *longueurs* des côtés d'un triangle sphérique et les angles.

Laissons indéterminée, pour plus de généralité, l'unité linéaire, et soient $\alpha$, $6$, $\gamma$ et R les nombres qui mesurent les côtés d'un triangle sphérique, et le rayon de la sphère sur laquelle il est tracé. Si l'on eût pris le rayon de la sphère pour unité, les côtés eussent été représentés par $\frac{\alpha}{R}$, $\frac{6}{R}$, $\frac{\gamma}{R}$; il suffit donc de remplacer les lettres $a$, $b$, $c$ par ces fractions dans celles des formules précédentes qu'on a besoin de considérer [*].

En particulier, si l'on veut déduire les formules de la trigonométrie rectiligne de celles de la trigonométrie sphérique, il suffira de remplacer dans ces dernières $a$, $b$, $c$ par $\frac{\alpha}{R}$, $\frac{6}{R}$, $\frac{\gamma}{R}$, et de chercher ce qu'elles deviennent lorsque $\alpha$, $6$, $\gamma$ restant constants, R devient infini. Nous allons faire l'application de ce qui précède aux formules (1) et (2), mais rappelons d'abord un résultat obtenu au n° 83, et dont nous avons besoin.

On a vu que, $x$ désignant un arc compris entre o et $\frac{\pi}{2}$, on a

$$\sin x < x \quad \text{et} \quad \sin x > x - \frac{x^3}{6},$$

$$\cos x > 1 - \frac{x^2}{2} \quad \text{et} \quad \cos x < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24};$$

si donc on désigne par $\theta$ et $\lambda$ deux fractions dont la valeur dépend de $x$, mais qui sont toujours comprises, la première entre o et $\frac{1}{6}$,

[*] On arrive à la même conclusion en remarquant que si l'on imagine un triangle semblable au proposé sur la sphère de rayon 1, les côtés de ce second triangle ont pour longueurs $\frac{\alpha}{R}$, $\frac{6}{R}$, $\frac{\gamma}{R}$, et renferment d'ailleurs les mêmes nombres $a$, $b$, $c$ de degrés que le proposé.

la seconde entre o et $\frac{1}{24}$, on peut poser

$$\sin x = x - \theta x^3,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \lambda x^4.$$

Considérons maintenant la formule

$$\frac{\sin a}{\sin A} = \frac{\sin b}{\sin B};$$

en mettant $\frac{\alpha}{R}$, $\frac{\beta}{R}$ au lieu de $a$ et $b$, il vient

$$\frac{\sin \frac{\alpha}{R}}{\sin A} = \frac{\sin \frac{\beta}{R}}{\sin B},$$

ou, en désignant par $\theta$ et $\theta'$ deux fractions comprises entre o et $\frac{1}{6}$,

$$\frac{\frac{\alpha}{R} - \theta \frac{\alpha^3}{R^3}}{\sin A} = \frac{\frac{\beta}{R} - \theta' \frac{\beta^3}{R^3}}{\sin B},$$

ou

$$\frac{\alpha - \theta \frac{\alpha^3}{R^2}}{\sin A} = \frac{\beta - \theta' \frac{\beta^3}{R^2}}{\sin B}.$$

Faisant $R = \infty$, il vient

$$\frac{\alpha}{\sin A} = \frac{\beta}{\sin B},$$

ce qui est la formule fondamentale de la trigonométrie rectiligne.

Considérons encore la formule

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

ou

$$\cos \frac{\alpha}{R} = \cos \frac{\beta}{R} \cos \frac{\gamma}{R} + \sin \frac{\beta}{R} \sin \frac{\gamma}{R} \cos A;$$

on en déduit, en désignant par $\lambda$, $\lambda'$, $\lambda''$ des fractions inférieures à $\frac{1}{24}$, et par $\theta$, $\theta'$ des fractions inférieures à $\frac{1}{6}$,

$$\left(1 - \frac{\alpha^2}{2R^2} + \frac{\lambda \alpha^4}{R^4}\right) = \left(1 - \frac{\beta^2}{2R^2} + \frac{\lambda' \beta^4}{R^4}\right)\left(1 - \frac{\gamma^2}{2R^2} + \frac{\lambda'' \gamma^4}{R^4}\right)$$
$$+ \left(\frac{\beta}{R} - \frac{\theta \beta^3}{R^3}\right)\left(\frac{\gamma}{R} - \frac{\theta' \gamma^3}{R^3}\right) \cos A.$$

Effectuant les opérations indiquées dans le second membre, supprimant l'unité dans chaque membre, multipliant tout par $R^2$ et faisant ensuite $R = \infty$, il vient

$$\alpha^2 = 6^2 + \gamma^2 - 2\,6\gamma \cos A,$$

qui est la relation entre trois côtés et un angle d'un triangle rectiligne.

### *Résolution des triangles sphériques rectangles.*

154. Un triangle sphérique peut être birectangle ou même trirectangle. Dans le premier cas, deux côtés sont égaux à 90 degrés, et le troisième côté est égal à l'angle opposé. Dans le second cas, les trois côtés sont égaux à 90 degrés. Les triangles de cette espèce ne peuvent donc donner lieu à aucun problème.

La résolution des triangles qui ont un seul angle droit présente six cas distincts que nous allons traiter; mais nous avons, auparavant, une remarque importante à faire.

Lorsqu'un côté ou un angle d'un triangle sphérique est donné par son cosinus, sa tangente ou sa cotangente, sa valeur est déterminée; car ce côté ou cet angle est compris entre 0 et 180 degrés. Mais s'il est donné par son sinus, il n'est pas entièrement déterminé; car à un sinus donné correspondent deux arcs ou deux angles supplémentaires.

155. Premier cas. — *Étant donnés l'hypoténuse a et un côté b de l'angle droit, calculer le troisième côté c et les deux angles obliques* B *et* C.

L'équation (5) donne, pour calculer $c$,

$$\cos c = \frac{\cos a}{\cos b};$$

et, pour calculer B et C, la première des équations (6) et

la première des équations (7) donnent

$$\sin B = \frac{\sin b}{\sin a}, \quad \cos C = \frac{\tang b}{\tang a}.$$

*Remarque.* — Le problème n'a qu'une solution, bien que l'angle B soit donné par son sinus; car on sait que B et $b$ sont de même espèce (nº 152).

156. Deuxième cas. — *Étant donnés les deux côtés b et c de l'angle droit, calculer l'hypoténuse a et les deux angles obliques* B *et* C.

L'équation (5) donne, pour calculer $a$,

$$\cos a = \cos b \cos c,$$

et, pour calculer les angles B et C, les deux dernières équations (7) donnent

$$\tang B = \frac{\tang b}{\sin c}, \quad \tang C = \frac{\tang c}{\sin b}.$$

157. Troisième cas. — *Étant donnés l'hypoténuse a et l'angle oblique* B, *calculer le deuxième angle* C, *et les deux côtés b et c de l'angle droit.*

La première équation (6), la deuxième équation (7) et la première équation (8) donnent

$$\sin b = \sin a \sin B, \quad \tang c = \tang a \cos B, \quad \tang C = \frac{\cot B}{\cos a}.$$

*Remarque.* — Le problème n'a qu'une solution; car la seule inconnue $b$ qui soit donnée par son sinus est de même espèce que l'angle donné B.

158. Quatrième cas. — *Étant donnés un côté b de l'angle droit et l'angle opposé* B, *calculer les côtés a et c, ainsi que l'angle* C.

La première équation (6), la troisième équation (7) et la deuxième équation (8) donnent

$$\sin a = \frac{\sin b}{\sin B}, \quad \sin c = \frac{\tang b}{\tang B}, \quad \sin C = \frac{\cos B}{\cos b}.$$

*Discussion.* — Les trois inconnues $a$, $c$ et C sont données par leur sinus, en sorte que chacune d'elles est susceptible de deux valeurs supplémentaires. Il importe donc d'examiner les valeurs qu'il faut prendre ensemble.

D'abord, si $b = B$, on a

$$\sin a = \sin c = \sin C = 1, \quad a = c = C = 90^\circ,$$

et le triangle est birectangle. Supposons donc $b$ différent de B.

1°. Si $b$ est $< 90^\circ$, il faut, pour que le problème soit possible, que B soit aussi $< 90^\circ$, et qu'on ait $b < B$. Supposons cette condition remplie : $\cos b$ étant positif, l'équation $\cos a = \cos b \cos c$ montre que $a$ et $c$ sont de même espèce; $c$ et C sont d'ailleurs aussi de même espèce. Si donc on désigne par $a'$, $c'$ et $C'$ les valeurs inférieures à 90 degrés que les Tables font connaître pour $a$, $c$ et C, on aura ces deux solutions :

$$a = a', \qquad c = c', \qquad C = C',$$
$$a = 180^\circ - a', \quad c = 180^\circ - c', \quad C = 180^\circ - C'.$$

2°. Si $b$ est $> 90^\circ$, il faut, pour que le problème soit possible, qu'on ait $B > 90^\circ$ et $b > B$. Supposons cette condition remplie : $\cos b$ étant négatif, l'équation $\cos a = \cos b \cos c$ montre que $a$ et $c$ sont d'espèces différentes; et, comme $c$ et C sont de même espèce, en désignant toujours par $a'$, $c'$ et $C'$ les valeurs de $a$, $c$ et C que les Tables font connaître, on aura ces deux solutions :

$$a = a', \qquad c = 180^\circ - c', \quad C = 180^\circ - C',$$
$$a = 180^\circ - a', \quad c = c', \qquad C = C'.$$

*Remarque.* — Il est facile de voir, à priori, qu'en exceptant le cas de $b = B$, le problème admet deux solutions lorsqu'il est possible. Supposons, en effet, que le triangle ABC, rectangle en A (*fig.* 21), satisfasse à la question, et prolongeons les côtés AB et BC jusqu'à leur rencontre

en B'; on formera un second triangle rectangle AB'C qui satisfera aussi à la question.

**159.** Cinquième cas. — *Etant donnés le côté b et l'angle adjacent* C, *calculer l'angle* B *et les deux côtés b et c.*

La première et la quatrième des équations (7) donnent, pour calculer $a$ et $c$,

$$\tang a = \frac{\tang b}{\cos C}, \quad \tang c = \sin b \tang C;$$

et la deuxième équation (8) donne, pour calculer B,

$$\cos B = \cos b \sin C.$$

**160.** Sixième cas. — *Etant donnés les deux angles obliques* B *et* C, *calculer les trois côtés a, b, c.*

Les formules (8) donnent

$$\cos a = \cot B \cot C, \quad \cos b = \frac{\cos B}{\sin C}, \quad \cos c = \frac{\cos C}{\sin B}.$$

**161.** Il y a une précaution à prendre avant d'appliquer le calcul des logarithmes aux différents cas que nous venons de traiter. Voici en quoi elle consiste : si l'angle ou l'arc qu'on veut calculer est donné par son cosinus ou sa tangente, et que la valeur de ce cosinus ou de cette tangente soit négative, on calculera à sa place l'angle supplémentaire qui a, au signe près, même cosinus et même tangente.

### *Résolution des triangles sphériques obliquangles.*

**162.** La résolution d'un triangle obliquangle peut quelquefois être ramenée à celle d'un triangle rectangle.

1°. Si parmi les éléments donnés se trouve un côté égal à 90 degrés, le triangle supplémentaire du proposé est rectangle; on résoudra ce dernier, dans lequel on connaît deux éléments outre l'angle droit; on en déduira ensuite les éléments inconnus du triangle proposé.

2°. Si parmi les éléments donnés se trouvent deux côtés égaux $a$ et $b$, ou deux angles égaux A et B, la perpendiculaire CD (*fig.* 24) abaissée du sommet C sur le côté AB, partagera le triangle ABC en deux triangles rectangles égaux dans toutes leurs parties. On résoudra le triangle rectangle ACD où l'on connaît deux éléments outre l'angle droit, et l'on aura immédiatement les éléments inconnus du triangle proposé.

3°. Si parmi les éléments donnés se trouvent deux côtés $a$ et $b$ ou deux angles A et B dont la somme est égale à 180 degrés, en prolongeant les côtés $a$ et $c$ jusqu'à leur rencontre en B′ (*fig.* 21), on formera un triangle AB′C dans lequel deux côtés ou deux angles seront égaux. La résolution du triangle AB′C se ramène, comme on l'a vu, à celle d'un triangle rectangle; elle entraîne d'ailleurs celle du proposé.

Dans chacun de ces cas, on peut ainsi éviter de recourir à la méthode générale que nous allons exposer.

La résolution des triangles sphériques offre six cas distincts.

163. Premier cas. — *Etant donnés les trois côtés $a$, $b$, $c$, calculer les trois angles* A, B, C.

L'angle A est déterminé par la formule

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A\,;$$

d'où l'on tire

$$\cos A = \frac{\cos a - \cos b \cos c}{\sin b \sin c}.$$

Cette formule n'est pas calculable par logarithmes, mais on peut en déduire d'autres qui le sont. Remplaçons cos A par la valeur précédente dans les formules

$$\sin \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}, \quad \cos \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{1 + \cos A}{2}},$$

il vient

$$\sin\tfrac{1}{2}\mathrm{A}=\sqrt{\frac{\sin b\sin c+\cos b\cos c-\cos a}{2\sin b\sin c}}=\sqrt{\frac{\cos(b-c)-\cos a}{2\sin b\sin c}}=\sqrt{\frac{\sin\frac{a-b+c}{2}\sin\frac{a+b-c}{2}}{\sin b\sin c}},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\mathrm{A}=\sqrt{\frac{\cos a-\cos b\cos c+\sin b\sin c}{2\sin b\sin c}}=\sqrt{\frac{\cos a-\cos(b+c)}{2\sin b\sin c}}=\sqrt{\frac{\sin\frac{a+b+c}{2}\sin\frac{-a+b+c}{2}}{\sin b\sin c}};$$

ou, en désignant par $2p$ le périmètre $a+b+c$,

$$\sin\tfrac{1}{2}\mathrm{A}=\sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b\sin c}},$$

$$\cos\tfrac{1}{2}\mathrm{A}=\sqrt{\frac{\sin p\sin(p-a)}{\sin b\sin c}};$$

enfin, en divisant ces deux formules l'une par l'autre, on obtient la suivante :

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\mathrm{A}=\sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin p\sin(p-a)}}.$$

Dans ces trois formules, le radical doit être pris positivement, parce que les lignes trigonométriques de l'angle aigu $\frac{1}{2}$ A sont toutes positives. Chacune d'elles est calculable par logarithmes. On en déduit, par de simples changements de lettres, trois autres semblables pour calculer l'angle B et trois pour calculer l'angle C.

Si l'on doit calculer les trois angles, il convient d'employer la troisième formule et les deux autres semblables, parce qu'on n'aura, de cette façon, que quatre logarithmes à chercher.

*Remarque.* — Pour qu'un triangle soit possible avec les côtés donnés $a$, $b$, $c$, il faut et il suffit que chacun de ces côtés soit moindre que la somme des deux autres, et que leur somme soit inférieure à 360 degrés. On retrouve ces conditions en cherchant dans quel cas la valeur précédente de tang $\frac{1}{2}$ A est réelle, ou dans quels cas les valeurs de sin $\frac{1}{2}$ A et de cos $\frac{1}{2}$ A sont réelles et moindres que 1. Nous

n'entrerons pas dans les détails de cette discussion, mais nous engageons le lecteur à la faire lui-même.

164. DEUXIÈME CAS. — *Étant donnés deux côtés a et b, ainsi que l'angle A opposé à l'un d'eux, calculer le côté c et les angles* B *et* C.

On calculera l'angle B par la formule

$$\sin B = \frac{\sin b \sin A}{\sin a}.$$

On obtiendra ensuite le côté $c$ à l'aide de la formule

$$\begin{aligned}\cos a &= \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A \\ &= \cos b\,(\cos c + \operatorname{tang} b \cos A \sin c);\end{aligned}$$

pour cela, on calculera, comme au n° 99, un angle auxiliaire $\varphi$, tel que

$$\operatorname{tang}\varphi = \operatorname{tang} b \cos A.$$

On peut prendre l'angle $\varphi$ entre 0 et 90 degrés ou entre 90 et 180 degrés, suivant que $\operatorname{tang} b \cos A$ est positif ou négatif. D'après cela, il vient

$$\begin{aligned}\cos a &= \cos b\,(\cos c + \operatorname{tang}\varphi \sin c), \\ &= \frac{\cos b}{\cos\varphi}(\cos c \cos\varphi + \sin c \sin\varphi), \\ &= \frac{\cos b}{\cos\varphi}\cos(c-\varphi),\end{aligned}$$

d'où

$$\cos(c-\varphi) = \frac{\cos a \cos\varphi}{\cos b}.$$

Cette formule fait connaître $c-\varphi$, et, par suite, $c$.

Le côté $c$ étant connu, on pourrait calculer l'angle C par la formule

$$\sin C = \frac{\sin c \sin A}{\sin a};$$

mais si l'on veut obtenir directement C, on fera usage de la

formule

$$\cot a \sin b = \cos b \cos C + \cot A \sin C.$$

On calculera un angle auxiliaire $\psi$ compris entre o et 180 degrés, et tel que

$$\tang \psi = \frac{\cot A}{\cos b};$$

on aura alors

$$\cot a \sin b = \cos b (\cos C + \tang \psi \sin C)$$
$$= \frac{\cos b}{\cos \psi} \cos (C - \psi),$$

d'où

$$\cos (C - \psi) = \cot a \tang b \cos \psi.$$

Cette formule fera connaître $C - \psi$ et, par suite, C.

165. L'introduction des angles auxiliaires $\varphi$ et $\psi$ dont nous avons fait usage, revient à décomposer le triangle ABC (*fig.* 24) en deux triangles rectangles, par une perpendiculaire $CD = h$. En effet, désignons par $\varphi$ l'arc AD, et par $\psi$ l'angle ACD; le triangle rectangle ACD donne

$$\tang \varphi = \tang b \cos A, \quad \cos h = \frac{\cos b}{\cos \varphi},$$

puis le triangle BCD donne

$$\cos (c - \varphi) = \frac{\cos a}{\cos h} = \frac{\cos a \cos \varphi}{\cos b}.$$

L'angle $\varphi$ est donc le même que celui désigné par la même lettre au nº 164.

De même, pour trouver C, on a, dans le triangle ACD,

$$\cot \psi = \cos b \tang A, \quad \tang h = \cos \psi \tang b,$$

et, dans le triangle BCD,

$$\cos (C - \psi) = \cot a \tang h = \cot a \tang b \cos \psi,$$

d'où l'on conclut que l'angle $\psi$ est le même que celui du nº 164.

Nous avons supposé que le pied D de la perpendiculaire AD tombe entre A et B; il peut en être autrement (*fig.* 25). Le point D, situé, dans tous les cas, sur la demi-circonférence ABA′, peut tomber entre B et A′; mais, dans ce cas, il n'y a d'autre changement à faire que celui de $c-\varphi$ et $C-\psi$ en $\varphi-c$ et $\psi-C$, et l'on voit que les formules précédentes ne changent pas, puisque les angles $c-\varphi$ et $C-\psi$ n'entrent que par leurs cosinus.

166. *Discussion.* — Reprenons les formules

$$\sin B = \frac{\sin b \sin A}{\sin a},$$

$$\cos(c-\varphi) = \frac{\cos a \cos \varphi}{\cos b},$$

$$\cos(C-\psi) = \cot a \tang b \cos \psi;$$

il faut, pour que le problème soit possible, que les seconds membres soient compris entre $-1$ et $+1$. Supposons cette condition remplie. Les Tables feront connaître pour B une valeur M comprise entre 0 et 90 degrés, et pour $c-\varphi$ et $C-\psi$, des valeurs N et P comprises entre 0 et 180 degrés; mais on satisfera aussi aux équations précédentes, en prenant $B = 180^\circ - M$, $c-\varphi = -N$, $C-\psi = -P$. Et, en effet, il peut y avoir deux solutions. Nous reviendrons plus loin sur la discussion de ce problème; mais nous croyons devoir montrer dès à présent comment on peut déterminer, dans chaque cas, les valeurs de B, C et $c$, qu'il faut prendre simultanément. On voit, par les *fig.* 24 et 25, que les différences $c-\varphi$ et $C-\psi$ sont toujours de même signe; on devra donc prendre

$$c = \varphi + N \quad \text{avec} \quad C = \psi + P,$$

et

$$c = \varphi - N \quad \text{avec} \quad C = \psi - P.$$

Voyons quelle valeur de B il faut choisir dans chacun de ces cas.

Si l'on prend $c = \varphi + N$, on est dans le cas de la *fig.* 24, le pied de la perpendiculaire CD est entre A et B ; alors les angles A et B, dans les triangles rectangles ACD et BCD, sont tous deux de même espèce que le côté CD. On devra donc prendre

$$B = M \quad \text{ou} \quad B = 180^\circ - M,$$

suivant que l'angle donné A sera aigu ou obtus.

Si l'on prend $c = \varphi - N$, on est dans le cas de la *fig.* 25 ; alors dans le triangle rectangle CAD l'angle A est de même espèce que CD, tandis que dans le triangle CBD, CD est de même espèce que l'angle CBD, et, par conséquent, d'espèce différente de B. Les angles A et B sont donc d'espèces différentes, et, par conséquent, on devra prendre

$$B = 180^\circ - M \quad \text{ou} \quad B = M,$$

suivant que l'angle donné A sera aigu ou obtus.

Chacune des deux solutions qu'on vient de considérer cessera d'exister, si la valeur de $c$ ou de C qui lui correspond est négative ou supérieure à 180 degrés.

167. TROISIÈME CAS. — *Étant donnés les deux côtés a et b ainsi que l'angle compris* C, *calculer le troisième côté c et les angles* A *et* B.

On calculera le côté $c$ par la formule

$$\begin{aligned}\cos c &= \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C \\ &= \cos a\,(\cos b + \sin b \operatorname{tang} a \cos C).\end{aligned}$$

Pour cela, on déterminera un angle auxiliaire $\varphi$, tel que

$$\operatorname{tang} \varphi = \operatorname{tang} a \cos C;$$

il vient alors

$$\begin{aligned}\cos c &= \cos a\,(\cos b + \operatorname{tang} \varphi \sin b) \\ &= \frac{\cos a \cos (b - \varphi)}{\cos \varphi},\end{aligned}$$

formule calculable par logarithmes. Cherchons maintenant

l'angle A. On a

$$\cot a \sin b = \cos b \cos C + \sin C \cot A;$$

d'où

$$\cot A = \frac{\cot a \sin b - \cos b \cos C}{\sin C},$$

$$= \cot C \left(\frac{\cot a}{\cos C} \sin b - \cos b\right),$$

$$= \cot C (\cot \varphi \sin b - \cos b),$$

$$= \frac{\cot C \sin (b - \varphi)}{\cos \varphi};$$

$\varphi$ étant l'angle auxiliaire déjà employé. Pour calculer B, on trouverait de même la formule

$$\cot B = \frac{\cot C \sin (a - \psi)}{\cos \psi},$$

l'angle auxiliaire $\psi$ étant déterminé par l'équation

$$\operatorname{tang} \psi = \operatorname{tang} b \cos C.$$

*Remarque.* — L'introduction des angles auxiliaires $\varphi$ et $\psi$ revient à décomposer le triangle en deux triangles rectangles, 1° par une perpendiculaire abaissée de A sur BC; 2° par une perpendiculaire abaissée de B sur AC.

168. Quatrième cas. — *Étant donnés le côté c et les deux angles adjacents* A *et* B, *calculer l'angle* C *et les côtés a et b.*

Pour calculer C, on se servira de la formule

$$\cos C = -\cos A \cos B + \sin A \sin B \cos c$$

$$= \cos A (-\cos B + \sin B \operatorname{tang} A \cos c).$$

Soit $\varphi$ un angle auxiliaire, tel que

$$\cot \varphi = \operatorname{tang} A \cos c;$$

on aura

$$\cos C = \cos A (-\cos B + \sin B \cot \varphi),$$

ou

$$\cos C = \frac{\cos A \sin(B - \varphi)}{\sin \varphi},$$

formule calculable par logarithmes.

Le côté $a$ s'obtiendra par la formule

$$\begin{aligned}
\cot a \sin c &= \cos c \cos B + \sin B \cot A \\
&= \cos c \left(\cos B + \sin B \frac{\cot A}{\cos c}\right) \\
&= \cos c\,(\cos B + \sin B \tang \varphi) \\
&= \frac{\cos c \cos(B - \varphi)}{\cos \varphi};
\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\cot a = \frac{\cot c \cos(B - \varphi)}{\cos \varphi},$$

$\varphi$ désignant le même angle auxiliaire déjà employé. On trouverait de même, pour calculer le côté $b$,

$$\cot b = \frac{\cot c \cos(A - \psi)}{\cos \psi},$$

$\psi$ étant un angle déterminé par la formule

$$\cot \psi = \tang B \cos c.$$

169. Cinquième cas. — *Étant donnés deux angles* A *et* B, *ainsi que le côté* a *opposé à l'un d'eux, calculer l'angle* C *et les côtés* b *et* c.

Le côté $b$ s'obtiendra par la formule

$$\sin b = \frac{\sin a \sin B}{\sin A}.$$

Pour trouver l'angle C, on emploiera la formule

$$\begin{aligned}
\cos A &= -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a \\
&= \cos B\,(-\cos C + \sin C \tang B \cos a).
\end{aligned}$$

Soit un angle auxiliaire $\psi$, tel que

$$\cot \psi = \tang B \cos a;$$

il vient

$$\cos A = \cos B\,(-\cos C + \sin C \cot \psi)$$

$$= \frac{\cos B \sin (C - \psi)}{\sin \psi},$$

d'où

$$\sin (C - \psi) = \frac{\cos A \sin \psi}{\cos B}.$$

Pour calculer le côté $c$, on se servira de la formule

$$\cot a \sin c = \cos c \cos B + \sin B \cot A,$$

d'où résulte

$$\frac{\cot a}{\cos B} \sin c - \cos c = \operatorname{tang} B \cot A.$$

Soit $\varphi$ un angle auxiliaire, tel que

$$\cot \varphi = \frac{\cot a}{\sin B};$$

on aura

$$\cot \varphi \sin c - \cos c = \operatorname{tang} B \cot A,$$

ou

$$\sin (c - \varphi) = \operatorname{tang} B \cot A \sin \varphi.$$

*Remarque.* — Ce cas, comme le deuxième, peut admettre deux solutions. La discussion est identiquement la même.

170. Sixième cas. — *Étant donnés les trois angles* A, B, C, *calculer les trois côtés* $a$, $b$, $c$.

Le côté $a$ est déterminé par l'équation

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a,$$

qui donne

$$\cos a = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C}.$$

On déduit de là

$$\sin\frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\sin B \sin C - \cos B \cos C - \cos A}{2 \sin B \sin C}} = \sqrt{\frac{-\cos A - \cos(B+C)}{2 \sin B \sin C}}$$

$$= \sqrt{\frac{-\cos\frac{A+B+C}{2}\cos\frac{-A+B+C}{2}}{\sin B \sin C}},$$

$$\cos\frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\sin B \sin C + \cos B \cos C + \cos A}{2 \sin B \sin C}} = \sqrt{\frac{\cos A + \cos(B-C)}{2 \sin B \sin C}}$$

$$= \sqrt{\frac{\cos\frac{A-B+C}{2}\cos\frac{A-B+C}{2}}{\sin B \sin C}},$$

ou, en faisant, pour abréger, $A + B + C - 180^\circ = 2\Delta$,

$$\sin\frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\sin\Delta \sin(A-\Delta)}{\sin B \sin C}},$$

$$\cos\frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\sin(B-\Delta)\sin(C-\Delta)}{\sin B \sin C}}.$$

On a encore, en divisant ces deux formules l'une par l'autre,

$$\tang\frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{\sin\Delta \sin(A-\Delta)}{\sin(B-\Delta)\sin(C-\Delta)}}.$$

Chacune des trois formules précédentes est calculable par logarithmes; on peut, par de simples changements de lettres, en déduire six autres, qui serviront à calculer les côtés $b$ et $c$.

**171.** Nous avons résolu directement les six cas que présente la résolution des triangles sphériques obliquangles; mais il faut remarquer qu'on aurait pu se dispenser de traiter les trois derniers, qui se ramènent immédiatement

aux trois premiers par la considération du triangle supplémentaire.

*Formules de Delambre et de Néper.*

**172.** En posant $a + b + c = 2p$, on a (n° **163**)

$$\sin\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b \sin c}}, \quad \cos\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{\sin p \sin(p-a)}{\sin b \sin c}},$$

$$\sin\frac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-c)}{\sin a \sin c}}, \quad \cos\frac{1}{2}B = \sqrt{\frac{\sin p \sin(p-b)}{\sin a \sin c}},$$

$$\sin\frac{1}{2}C = \sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)}{\sin a \sin b}}, \quad \cos\frac{1}{2}C = \sqrt{\frac{\sin p \sin(p-c)}{\sin a \sin b}}.$$

D'après cela, les formules

$$\sin\tfrac{1}{2}(A \pm B) = \sin\tfrac{1}{2}A \cos\tfrac{1}{2}B \pm \cos\tfrac{1}{2}A \sin\tfrac{1}{2}B,$$
$$\cos\tfrac{1}{2}(A \pm B) = \cos\tfrac{1}{2}A \cos\tfrac{1}{2}B \mp \sin\tfrac{1}{2}A \sin\tfrac{1}{2}B$$

donnent

$$\sin\frac{1}{2}(A \pm B) = \frac{\sin(p-b) \pm \sin(p-a)}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin p \sin(p-c)}{\sin a \sin b}}$$
$$= \frac{\sin(p-b) \pm \sin(p-a)}{\sin c}\cos\frac{1}{2}C,$$

$$\cos\frac{1}{2}(A \pm B) = \frac{\sin p \mp \sin(p-c)}{\sin c}\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)}{\sin a \sin b}}$$
$$= \frac{\sin p \mp \sin(p-c)}{\sin c}\sin\frac{1}{2}C;$$

d'ailleurs

$$\sin(p-a) + \sin(p-b) = 2\sin\tfrac{1}{2}c \cos\tfrac{1}{2}(a-b),$$
$$\sin(p-b) - \sin(p-a) = 2\cos\tfrac{1}{2}c \sin\tfrac{1}{2}(a-b),$$
$$\sin p + \sin(p-c) = 2\sin\tfrac{1}{2}(a+b)\cos\tfrac{1}{2}c;$$
$$\sin p - \sin(p-c) = 2\cos\tfrac{1}{2}(a+b)\sin\tfrac{1}{2}c,$$
$$\sin c = 2\sin\tfrac{1}{2}c \cos\tfrac{1}{2}c;$$

I.R.

on a donc

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}C} &= \frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}c},\\
\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}C} &= \frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}c},\\
\frac{\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\sin\frac{1}{2}C} &= \frac{\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}c},\\
\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}C} &= \frac{\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}c}.
\end{aligned}\right.$$

Ces formules (1) ont été découvertes par Delambre, qui les a fait connaître en 1807, dans la *Connaissance des Temps* pour 1809 (page 445). M. Gauss, à qui elles sont quelquefois attribuées, ne les a données que deux ans plus tard, dans l'ouvrage intitulé : *Theoria motus corporum cœlestium in sectionibus conicis solem ambientium.*

**173.** Si l'on divise la première des équations (1) par la troisième, la deuxième par la quatrième, puis la quatrième par la troisième et la deuxième par la première, on obtient les quatre suivantes :

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}
\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A+B) &= \cot\tfrac{1}{2}C\,\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)},\\
\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A-B) &= \cot\tfrac{1}{2}C\,\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)},\\
\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(a+b) &= \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}c\,\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)},\\
\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(a-b) &= \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}c\,\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}.
\end{aligned}\right.$$

Ces équations (2) sont appelées formules de Néper. Chacune d'elles est une relation entre cinq éléments d'un triangle sphérique.

### *Application des formules de Néper à la résolution des triangles sphériques.*

**174.** Les formules de Néper peuvent être appliquées avec avantage à la résolution des triangles sphériques ; elles

permettent d'éviter l'emploi des angles auxiliaires. C'est ce que nous allons faire voir.

DEUXIÈME CAS. — *Étant donnés deux côtés $a$ et $b$, ainsi que l'angle A opposé à l'un d'eux, calculer le côté $c$ et les angles B et C.*

Comme au n° 164, on calcule l'angle B par la formule

$$\sin B = \frac{\sin b \sin A}{\sin a};$$

ensuite les formules de Néper donnent, pour calculer l'angle C et le côté $c$,

$$(1)\quad \begin{cases} \cot\frac{1}{2}C = \dfrac{\tang\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(a+b)}{\cos\frac{1}{2}(a-b)}, \\ \tang\frac{1}{2}c = \dfrac{\tang\frac{1}{2}(a+b)\cos\frac{1}{2}(A+B)}{\cos\frac{1}{2}(A-B)}, \end{cases}$$

ou

$$(2)\quad \begin{cases} \cot\frac{1}{2}C = \dfrac{\tang\frac{1}{2}(A-B)\sin\frac{1}{2}(a+b)}{\sin\frac{1}{2}(a-b)}, \\ \tang\frac{1}{2}c = \dfrac{\tang\frac{1}{2}(a-b)\sin\frac{1}{2}(A+B)}{\sin\frac{1}{2}(A-B)}, \end{cases}$$

formules qui sont calculables par logarithmes.

*Discussion.* — Dans le cas particulier de $a = b$, on a aussi $A = B$, et les formules (1) donnent

$$\cot\frac{1}{2}C = \tang A \cos a,$$
$$\tang\frac{1}{2}c = \tang a \cos A.$$

Pour que le problème soit possible, il faut et il suffit que $\cot\frac{1}{2}C$ et $\tang\frac{1}{2}c$ soient positifs, c'est-à-dire que $\tang A$ et $\cos a$, $\cos A$ et $\tang a$ aient le même signe, ou que A et $a$ soient de même espèce. Il n'y a qu'une seule solution.

Passons au cas général. Il faut, pour que le problème soit possible, que $\dfrac{\sin b \sin A}{\sin a}$ soit moindre que 1; si cette condition est remplie, il y a deux valeurs de B qui satisfont à l'équation $\sin B = \dfrac{\sin b \sin A}{\sin a}$: l'une M est plus petite que 90 degrés, l'autre M' est égale à $180° - M$.

Pour que l'une de ces valeurs de B réponde à la question, il faut et il suffit que les valeurs correspondantes de $\cot \frac{1}{2} C$ et de $\tang \frac{1}{2} c$ soient positives, et par conséquent, d'après les formules (2), que $A - B$ et $a - b$ aient le même signe. Ainsi la condition pour que M réponde à la question est que $A - M$ soit de même signe que $a - b$; de même la condition pour que M' y réponde est que $A - M'$ soit de même signe que $a - b$. On voit que le problème peut admettre une ou deux solutions; il peut aussi n'en admettre aucune.

1°. Supposons $A < 90°$, et $b < 90°$.

Si $a$ est $< b$, la formule $\sin B = \frac{\sin b \sin A}{\sin a}$ donne $M > A$, et, à fortiori, $M' > A$; il y a donc deux solutions.

Si $a$ est $> b$, on peut avoir

$$a + b < 180°, \quad a + b = 180°, \quad a + b > 180°.$$

Dans le premier cas, on a

$$b < 180° - a, \quad \sin b < \sin a,$$

alors M est $< A$; mais M' étant $> A$, il n'y a qu'une seule solution.

Dans le cas de $a + b = 180°$, on a

$$b = 180° - a, \quad \sin b = \sin a,$$

alors $M = A$, et $M' > A$; il n'y a donc aucune solution.

Dans le cas de $a + b > 180°$, on a

$$b > 180° - a, \quad \sin b > \sin a,$$

alors M est $> A$, et, à fortiori, $M' > A$; il n'y a donc aucune solution.

2°. Supposons $A < 90°$ et $b > 90°$.

Si $a$ est $< b$, on peut avoir

$$a + b < 180°, \quad a + b = 180°, \quad a + b > 180°.$$

Dans le premier cas, on a

$$b < 180° - a, \quad \sin b > \sin a,$$

alors M est $> A$, et, à fortiori, $M' > A$; il y a donc deux solutions.

Dans le cas de $a + b = 180°$, on a

$$b = 180° - a, \quad \sin b = \sin a,$$

alors $M = A$, $M' > A$; il n'y a donc qu'une solution.

Dans le cas de $a + b > 180°$, on a

$$b > 180° - a, \quad \sin b < \sin a,$$

alors M est $< A$; mais comme $M'$ est $> A$, il y a encore une solution.

Si $a$ est $> b$, on a

$$\sin a < \sin b,$$

puisque $a$ et $b$ sont obtus : alors on a $M > A$, et, à fortiori, $M' > A$; il n'y a donc aucune solution.

L'hypothèse $A > 0$ se discute de la même manière. On peut comprendre les résultats dans le tableau suivant :

| | | | |
|---|---|---|---|
| $A < 90°$ | $b < 90°$ | $a < b$. . . . . . . . . . . . | deux solutions, |
| | | $a = b$. . . . . . . . . . . . | une solution, |
| | | $a > b$ et $a + b < 180°$. . . . | une solution, |
| | | $a > b$ et $a + b =$ ou $> 180°$, | aucune solution. |
| | $b > 90°$ | $a < b$ et $a + b < 180°$. . . . | deux solutions, |
| | | $a < b$ et $a + b =$ ou $> 180°$, | une solution, |
| | | $a = b$ ou $a > b$. . . . . . . | aucune solution. |
| $A > 90°$ | $b < 90°$ | $a < b$ ou $a = b$. . . . . . . | aucune solution, |
| | | $a > b$ et $a + b > 180°$. . . . | deux solutions, |
| | | $a > b$ et $a + b =$ ou $< 180°$. | aucune solution. |
| | $b > 90°$ | $a < b$ et $a + b > 180°$. . . . | une solution, |
| | | $a < b$ et $a + b =$ ou $< 180°$. | aucune solution, |
| | | $a = b$. . . . . . . . . . . . | une solution, |
| | | $a > b$. . . . . . . . . . . . | deux solutions. |

Nous n'avons pas considéré le cas de $A = 90°$, parce qu'il convient alors d'employer la méthode du n° 155, ni celui où $b$ est égal à 90 degrés, parce qu'il se ramène au cas des triangles rectangles à l'aide du triangle supplémentaire, ainsi que nous en avons déjà fait la remarque au n° 162.

**175.** Troisième cas. — *Étant donnés deux côtés a et b*

*ainsi que l'angle compris* C, *calculer le côté c et les angles* A *et* B.

Les formules de Néper donnent

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A+B)=\cot\tfrac{1}{2}C\,\frac{\cos\frac{1}{2}(a-b)}{\cos\frac{1}{2}(a+b)},$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(A-B)=\cot\tfrac{1}{2}C\,\frac{\sin\frac{1}{2}(a-b)}{\sin\frac{1}{2}(a+b)}.$$

Ces formules permettront de calculer $\frac{1}{2}(A+B)$ et $\frac{1}{2}(A-B)$, par suite A et B.

Quant au côté $c$, on peut le calculer par la formule

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}c=\sqrt{\frac{\sin\Delta\sin(C-\Delta)}{\sin(A-\Delta)\sin(B-\Delta)}}$$

du nº 170. On voit que le problème n'a qu'une solution.

176. Quatrième cas. — *Étant donnés un côté c et les deux angles adjacents* A *et* B, *calculer l'angle* C *et les deux côtés a et b.*

Les formules de Néper donnent

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(a+b)=\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}c\,\frac{\cos\frac{1}{2}(A-B)}{\cos\frac{1}{2}(A+B)},$$

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(a-b)=\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}c\,\frac{\sin\frac{1}{2}(A-B)}{\sin\frac{1}{2}(A+B)}.$$

On pourra ainsi calculer $\frac{1}{2}(a+b)$ et $\frac{1}{2}(a-b)$, par suite $a$ et $b$. On calculera ensuite l'angle C par la formule

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}C=\sqrt{\frac{\sin(p-a)\sin(p-b)}{\sin p\sin(p-c)}}$$

du nº 164.

177. Cinquième cas. — *Étant donnés deux angles* A *et* B *et le côté a opposé à l'un deux, calculer l'angle* C *et les deux côtés b et c.*

On calculera $b$ à l'aide de la formule

$$\sin b=\frac{\sin a\sin B}{\sin A},$$

puis les formules de Néper donnent, pour calculer $c$ et C,

$$\operatorname{tang} \tfrac{1}{2} c = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(a-b) \sin \frac{1}{2}(A+B)}{\sin \frac{1}{2}(A-B)},$$

$$\cot \tfrac{1}{2} C = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(A-B) \sin \frac{1}{2}(a+b)}{\sin \frac{1}{2}(a-b)}.$$

*Remarque.* — Il peut y avoir deux solutions. La discussion est identique à celle du n° **174**. On peut d'ailleurs ramener le problème au deuxième cas, par la considération du triangle supplémentaire, ainsi que nous en avons déjà fait la remarque.

### *Résolution d'un triangle sphérique dont les côtés sont très-petits par rapport au rayon de la sphère.*

**178.** L'illustre Legendre a fait connaître un beau théorème, généralisé depuis par M. Gauss, et par lequel on ramène à la résolution d'un triangle rectiligne, celle d'un triangle sphérique dont les côtés sont très-petits par rapport au rayon de la sphère. Nous allons présenter ici ce théorème, très-intéressant en lui-même, et fort utile dans les opérations géodésiques; mais rappelons d'abord une définition qui en simplifiera l'énoncé.

Considérons un triangle sphérique situé sur une sphère de rayon R; soient $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les nombres qui mesurent les côtés, et $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ ceux qui mesurent les angles opposés, ou, si l'on veut (n° **101**), qui mesurent les arcs de la circonférence de rayon 1 correspondants à ces angles. Le nombre

$$\varepsilon = \mathcal{A} + \mathcal{B} + \mathcal{C} - \pi$$

est appelé *excès sphérique;* si l'on désigne par $s$ la surface du triangle, on a, comme on sait,

$$(1) \qquad \varepsilon = \frac{s}{R^2}.$$

Voici maintenant en quoi consiste le théorème de Legendre :

*Étant donné un triangle sphérique dont les côtés sont très-petits par rapport au rayon de la sphère, si l'on construit un triangle rectiligne qui ait les mêmes côtés que ceux du triangle sphérique,*

*les surfaces des deux triangles seront égales, et les angles du triangle sphérique seront égaux à ceux du triangle rectiligne augmentés du tiers de l'excès sphérique.*

La démonstration de ce théorème repose sur les développements en série de $\sin x$ et de $\cos x$, que nous donnerons dans le livre sixième. Nous admettrons, pour le moment, que si $x$ est un très-petit arc, on a sensiblement, c'est-à-dire en ne négligeant que les puissances de $x$ supérieures à la quatrième,

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6},$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}.$$

Cela posé, on a (nº 148)

$$\cos\frac{\alpha}{R} = \cos\frac{6}{R}\cos\frac{\gamma}{R} + \sin\frac{6}{R}\sin\frac{\gamma}{R}\cos \mathcal{A},$$

d'où

$$\cos \mathcal{A} = \frac{\cos\frac{\alpha}{R} - \cos\frac{6}{R}\cos\frac{\gamma}{R}}{\sin\frac{6}{R}\sin\frac{\gamma}{R}};$$

nous admettons d'ailleurs que

$$\cos\frac{\alpha}{R} = 1 - \frac{\alpha^2}{2R^2} + \frac{\alpha^4}{24R^4},$$

$$\cos\frac{6}{R} = 1 - \frac{6^2}{2R^2} + \frac{6^4}{24R^4}, \qquad \sin\frac{6}{R} = \frac{6}{R} - \frac{6^3}{6R^3},$$

$$\cos\frac{\gamma}{R} = 1 - \frac{\gamma^2}{2R^2} + \frac{\gamma^4}{24R^4}, \qquad \sin\frac{\gamma}{R} = \frac{\gamma}{R} - \frac{\gamma^3}{6R^3}.$$

En portant ces valeurs dans l'expression de $\cos \mathcal{A}$ et négligeant toujours les puissances de $\frac{1}{R}$ supérieures à la quatrième, il vient

$$\cos \mathcal{A} = \frac{\frac{6^2+\gamma^2-\alpha^2}{2R^2} + \frac{\alpha^4 - 6^4 - \gamma^4 - 6\,6^2\gamma^2}{24R^4}}{\frac{6\gamma}{R^2}\left(1 - \frac{6^2+\gamma^2}{6R^2}\right)}.$$

En supprimant le facteur $\frac{1}{R^2}$ commun aux deux termes et déve-

loppant le facteur

$$\frac{1}{1-\dfrac{\beta^2+\gamma^2}{6R^2}} = 1 + \frac{\beta^2+\gamma^2}{6R^2} + \ldots,$$

puis négligeant les termes où entre $\frac{1}{R^4}$, on trouve enfin

$$(2)\ \cos\mathcal{A} = \frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma} - \frac{2\alpha^2\beta^2+2\alpha^2\gamma^2+2\beta^2\gamma^2-\alpha^4-\beta^4-\gamma^4}{24\beta\gamma R^2}.$$

Soient maintenant $s'$ la surface du triangle rectiligne qui a pour côtés $\alpha$, $\beta$, $\gamma$; $\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{C}'$, les angles opposés respectivement à ces côtés : on a

$$\cos\mathcal{A}' = \frac{\beta^2+\gamma^2-\alpha^2}{2\beta\gamma},$$

$$\sin^2\mathcal{A}' = \frac{2\alpha^2\beta^2+2\alpha^2\gamma^2+2\beta^2\gamma^2-\alpha^4-\beta^4-\gamma^4}{4\beta^2\gamma^2};$$

d'après cela, l'équation (2) devient

$$\cos\mathcal{A} = \cos\mathcal{A}' - \frac{\beta\gamma\sin^2\mathcal{A}'}{6R^2},$$

ou, à cause de $s' = \frac{1}{2}\beta\gamma\sin\mathcal{A}'$,

$$(3)\qquad \cos\mathcal{A} = \cos\mathcal{A}' - \frac{s'}{3R^2}\sin\mathcal{A}'.$$

Posons

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}' + x,\quad \cos\mathcal{A} = \cos\mathcal{A}'\cos x - \sin\mathcal{A}'\sin x;$$

l'angle $x$ étant très-petit, on peut prendre $\cos x = 1$ et $\sin x = x$, il vient alors

$$(4)\qquad \cos\mathcal{A} = \cos\mathcal{A}' - x\sin\mathcal{A}'.$$

La comparaison des équations (3) et (4) donne

$$x = \frac{s'}{3R^2};$$

on a donc

$$(5)\qquad \begin{cases} \mathcal{A} = \mathcal{A}' + \dfrac{s'}{3R^2}, \\ \mathcal{B} = \mathcal{B}' + \dfrac{s'}{3R^2}, \\ \mathcal{C} = \mathcal{C}' + \dfrac{s'}{3R^2}. \end{cases}$$

Ajoutant ces équations, et remarquant que $\mathcal{A}' + \mathcal{B}' + \mathcal{C}' = \pi$, il vient

$$\mathcal{A} + \mathcal{B} + \mathcal{C} = \pi + \frac{s'}{R^2},$$

ou

$$\varepsilon = \frac{s'}{R^2};$$

par conséquent, on a d'abord $s' = s$, et les équations (5) donnent

$$(6)\quad \begin{cases} \mathcal{A} = \mathcal{A}' + \frac{\varepsilon}{3}, \\ \mathcal{B} = \mathcal{B}' + \frac{\varepsilon}{3}, \\ \mathcal{C} = \mathcal{C}' + \frac{\varepsilon}{3}. \end{cases}$$

Le théorème est donc démontré.

**179.** En désignant par A, B, C, comme à l'ordinaire, les nombres de degrés contenus dans les angles du triangle sphérique, et par A', B', C' les nombres de degrés contenus dans les angles du triangle rectiligne, on peut écrire les formules précédentes comme il suit :

$$(7)\quad \begin{cases} A = A' + 60\frac{\varepsilon}{\pi} = A' + 60\frac{s'}{\pi R^2}, \\ B = B' + 60\frac{\varepsilon}{\pi} = B' + 60\frac{s'}{\pi R^2}, \\ C = C' + 60\frac{\varepsilon}{\pi} = C' + 60\frac{s'}{\pi R^2}. \end{cases}$$

**180.** Voici maintenant comment on peut faire usage de ce théorème.

1°. *On donne les trois côtés* $\alpha$, $6$, $\gamma$ *du triangle sphérique.*

On calculera les angles A', B', C' et la surface $s'$ du triangle rectiligne qui a pour côtés $\alpha$, $6$, $\gamma$; les formules (7) donneront ensuite A, B, C.

2°. *On donne les deux côtés* $\alpha$, $6$ *et l'angle compris* C.

On a $s' = \frac{1}{2}\alpha 6 \sin C'$, mais on peut prendre

$$s' = \frac{1}{2}\alpha 6 \sin C,$$

valeur qui ne diffère de la véritable que par des termes du même ordre de petitesse que $\frac{1}{R^2}$. On calculera $s'$ par cette formule, et alors la troisième équation (7) fera connaître C'; on résoudra le triangle rectiligne dont on connaît les éléments $\alpha$, $6$ et C', on aura donc $\gamma$, A' et B'; les équations (7) feront connaître ensuite A et B.

3°. *On donne les côtés* $\alpha$, $6$ *et l'angle* A.

La première équation (7) fait connaître A'. L'angle B' est donné par la formule $\sin B' = \frac{6 \sin A'}{\alpha}$, mais on peut prendre, sans erreur sensible,

$$\sin B' = \frac{6 \sin A}{\alpha};$$

l'angle B' étant connu, on détermine $s'$ par la formule

$$s' = \tfrac{1}{2} ab \sin(A' + B').$$

On a ensuite les angles B et C par les formules (7).

4°. *On donne* A, B *et* $\gamma$.

On a

$$s' = \frac{\gamma^2}{2} \frac{\sin A' \sin B'}{\sin(A' + B')},$$

mais on peut prendre, sans erreur sensible,

$$s' = \frac{\gamma^2}{2} \frac{\sin A \sin B}{\sin(A + B)};$$

$s'$ étant connu, on connaît A' et B' par les formules (7): il n'y aura donc plus qu'à résoudre un triangle rectiligne avec les données A', B' et $\gamma$.

## *Applications de la trigonométrie sphérique.*

**181.** Problème I. — *Calculer le volume d'un parallélipipède oblique, connaissant les longueurs des arêtes et les angles qu'elles font entre elles.*

Soient OP = P, OQ = Q, OR = R (*fig.* 26), les trois arêtes contiguës du parallélipipède. Du point O comme centre, avec un rayon égal à l'unité, décrivons une sphère,

qui coupe les faces de l'angle solide O suivant les côtés du triangle sphérique ABC. Les côtés $a$, $b$, $c$ de ce triangle sont précisément les angles plans donnés de l'angle trièdre O, et les angles A, B, C sont égaux aux dièdres de l'angle solide.

Le parallélogramme POQ a pour mesure PQ sin $c$; si donc RI est la perpendiculaire abaissée du sommet R sur le plan POQ, le volume V du parallélipipède sera

$$V = \text{PQ} \sin c \times \text{RI}.$$

Abaissons RK perpendiculaire sur OP, et joignons IK; l'angle RKI est égal à l'angle A du triangle sphérique, et les triangles rectangles RKO et RKI donnent

$$\text{RK} = \text{R} \sin b, \quad \text{RI} = \text{RK} \sin \text{A} = \text{R} \sin b \sin \text{A};$$

on a donc

$$V = \text{PQR} \sin b \sin c \sin \text{A}.$$

Or, en faisant $a + b + c = 2p$, on a (nº 164)

$$\sin \tfrac{1}{2} \text{A} = \sqrt{\frac{\sin(p-b)\sin(p-c)}{\sin b \sin c}},$$

$$\cos \tfrac{1}{2} \text{A} = \sqrt{\frac{\sin p \sin(p-a)}{\sin b \sin c}},$$

et, en multipliant,

$$\sin \text{A} = \frac{1}{2 \sin b \sin c} \sqrt{\sin p \sin(p-a) \sin(p-b) \sin(p-c)}.$$

On a donc

$$V = \frac{1}{2} \text{PQR} \sqrt{\sin p \sin(p-a) \sin(p-b) \sin(p-c)}.$$

182. Problème II. — *Réduire un angle à l'horizon.*

Supposons qu'un observateur placé au point O (*fig.* 27) ait mesuré les angles formés avec la verticale OO′ par les rayons visuels OP et OQ dirigés vers deux points fixes P et Q, et qu'il ait mesuré aussi l'angle POQ formé par ces rayons visuels; on demande de trouver l'angle P′O′Q′ qui est la projection de POQ sur le plan horizontal.

Si l'on imagine une sphère décrite du point O comme centre, avec l'unité pour rayon, elle sera coupée par les trois faces de l'angle trièdre en O, suivant un triangle sphérique ABC, dont les côtés seront précisément les angles observés ; tandis que l'angle P'O'Q' qu'il faut trouver est égal à l'angle A de ce triangle sphérique. On est ainsi ramené au premier cas de la résolution des triangles sphériques.

183. Problème III. — *Étant données les latitudes et les longitudes de deux points à la surface de la terre, trouver la distance de ces deux points.*

Soient P le pôle boréal (*fig.* 28), P' le pôle austral, EOE' l'équateur, et O le point de l'équateur à partir duquel se comptent les longitudes. Supposons que OE soit le sens des longitudes orientales, et OE' celui des longitudes occidentales. Soient PACP' et PBDP' les méridiens qui passent par les deux points donnés, dont on connaît les latitudes AC, BD, et les longitudes OC, OD; soit enfin AB l'arc de grand cercle qui joint les points A et B. Dans le triangle sphérique PAB, on connaît l'angle P et les deux côtés qui comprennent cet angle. En effet, l'angle P est la différence ou la somme des longitudes données, suivant qu'elles sont toutes deux orientales ou occidentales, ou bien que l'une est orientale et l'autre occidentale. En outre, le côté PA est égal à 90° — ou + la latitude du point A, suivant que cette dernière est boréale ou australe; et, de même, le côté PB est égal à 90° — ou + la latitude du point B.

Le triangle sphérique PAB étant résolu, on connaîtra le nombre de degrés renfermés dans AB. Désignons-le par $n$, la demi-circonférence d'un méridien terrestre étant égale à 20000000 de mètres, on aura, pour la longueur de AB en mètres,

$$AB = \frac{n}{9} \times 1000000.$$

### *Questions proposées.*

1. Démontrer que si $\alpha$ désigne l'arc de grand cercle qui joint le sommet A d'un triangle sphérique au milieu du côté opposé, on a

$$\cos\alpha = \frac{\cos\frac{1}{2}(b+c)\cos\frac{1}{2}(b-c)}{\cos\frac{1}{2}a}.$$

2. Démontrer que dans un triangle sphérique les sinus des trois *hauteurs* sont inversement proportionnels aux sinus des côtés sur lesquels ces hauteurs sont abaissées.

3. Résoudre un triangle sphérique, connaissant les trois hauteurs ou les arcs qui joignent les sommets aux milieux des côtés opposés.

4. R désignant le *rayon sphérique* du cercle circonscrit à un triangle ABC, $r$ le *rayon* du cercle inscrit, $\alpha$ le *rayon* du cercle exinscrit qui touche le côté $a$ et les prolongements des deux autres côtés, $2p$ le périmètre $a+b+c$; démontrer que l'on a

$$\cot R = 2\cos\tfrac{1}{2}a\cos\tfrac{1}{2}b\cos\tfrac{1}{2}c\,\frac{\sin A}{\sin a},$$

$$\tang r = \frac{\sin b\sin c\sin A}{2\sin s},$$

$$\tang\alpha = \frac{\sin b\sin c\sin A}{2\sin(s-a)}.$$

5. Résoudre un triangle sphérique rectangle, connaissant l'hypoténuse et le rayon du cercle inscrit.

6. Calculer le volume d'un tétraèdre en fonction de ses six arêtes.

# LIVRE SIXIÈME.

## COMPLÉMENT DE LA THÉORIE DES FONCTIONS CIRCULAIRES.

**Des expressions imaginaires. — Formule de Moivre pour un exposant entier et positif. — De la multiplication des arcs. — De la division des arcs. — Résolution de l'équation binôme $z^m = 1$. — Des polygones réguliers. — Résolution des équations binôme et trinôme. — Formule de Moivre pour un exposant quelconque. — Théorèmes de Moivre et de Cotes. — Résolution de l'équation du troisième degré. — Expressions des puissances du sinus et du cosinus d'un arc en fonction linéaire des sinus et cosinus des multiples de cet arc. — Développements du sinus et du cosinus d'un arc, en séries ordonnées suivant les puissances de l'arc. — Formules pour la construction des Tables de logarithmes des fonctions circulaires.**

---

### *Des expressions imaginaires.*

**184.** Conformément à l'usage adopté, nous représenterons par $i$ l'imaginaire $\sqrt{-1}$, et nous appellerons *expression imaginaire*, toute expression de la forme

$$A + Bi,$$

où A et B sont des nombres positifs ou négatifs.

Quand nous saurons d'avance que deux nombres A′ et B′ sont respectivement égaux à deux autres A et B, nous dirons que les expressions $A + Bi$ et $A' + B'i$ sont égales.

Il est évident que si l'on a plusieurs égalités de la forme

$$A + Bi = A' + B'i,$$

et qu'on les multiplie membre à membre, en opérant comme si $i$ était un nombre positif ou négatif, on obtiendra une égalité dans laquelle les coefficients des mêmes puissances de $i$ seront égaux ; l'égalité subsistera donc quand on rabaissera les exposants de $i$ au-dessous de 2, en faisant usage de l'équation $i^2 = -1$.

**185.** Considérons une expression imaginaire

$$A + Bi.$$

On peut toujours trouver un nombre *positif* $\rho$ et un arc $a$ tels qu'on ait

$$A = \rho \cos a, \quad B = \rho \sin a.$$

En effet, il suffit de prendre

$$\rho = +\sqrt{A^2 + B^2},$$

puis

$$\cos a = \frac{A}{+\sqrt{A^2 + B^2}}, \quad \sin a = \frac{B}{+\sqrt{A^2 + B^2}};$$

par conséquent, on peut écrire (n° 184)

$$A + Bi = \rho \cos a + i \rho \sin a,$$

ou, si l'on veut,

$$A + Bi = \rho (\cos a + i \sin a).$$

Quand une expression imaginaire est ainsi ramenée à la forme $\rho(\cos a + i \sin a)$, le nombre positif $\rho$ est appelé son *module*, et l'arc $a$ son *argument*.

Le module d'une expression imaginaire donnée est déterminé, mais l'argument ne l'est pas entièrement, car une expression imaginaire ne change pas quand on ajoute à son argument ou qu'on en retranche un nombre quelconque de circonférences.

Les nombres positifs et négatifs peuvent être considérés comme des expressions imaginaires dont le module est égal à leur valeur absolue, et l'argument à un nombre pair ou impair de demi-circonférences; car, soit A un nombre positif, on a, quel que soit l'entier $k$,

$$+A = A(\cos 2k\pi + i \sin 2k\pi),$$
$$-A = A[\cos(2k+1)\pi + i \sin(2k+1)\pi].$$

Pour que deux expressions imaginaires soient égales, il faut et il suffit que leurs modules soient égaux, et que leurs arguments diffèrent d'un multiple de la circonférence. Supposons, en effet, que les expressions $\rho(\cos a + i \sin a)$ et

$\rho'(\cos a' + i \sin a')$ soient égales; on a

$$\rho \cos a = \rho' \cos a', \quad \rho \sin a = \rho' \sin a',$$

et, en ajoutant ces équations, après les avoir élevées au carré,

$$\rho^2 = \rho'^2, \quad \text{et} \quad \rho = \rho'.$$

Les modules sont donc égaux. Alors les arcs $a$ et $a'$ ont même sinus et même cosinus; donc ils ne peuvent différer, s'ils sont inégaux, que par un multiple de la circonférence.

Les arguments de deux expressions imaginaires *conjuguées*, telles que $A + Bi$ et $A - Bi$, ont même cosinus, tandis que leurs sinus sont égaux et de signes contraires; la somme de ces arguments est donc égale à un multiple de la circonférence.

*Formule de Moivre pour un exposant entier et positif.*

**186.** Théorème. — *Le produit de deux expressions imaginaires est une expression imaginaire dont le module et l'argument sont respectivement le produit des modules et la somme des arguments des facteurs.*

Considérons d'abord deux expressions imaginaires de module 1, $\cos a + i \sin a$ et $\cos b + i \sin b$: en effectuant le produit, il vient

$$(\cos a + i \sin a)(\cos b + i \sin b) = \cos a \cos b + i(\sin a \cos b + \cos a \sin b) + i^2 \sin a \sin b,$$

ou, à cause de $i^2 = -1$,

$$(\cos a + i \sin a)(\cos b + i \sin b) = (\cos a \cos b - \sin a \sin b) + i(\sin a \cos b + \cos a \sin b);$$

or nous savons que

$$\cos a \cos b - \sin a \sin b = \cos(a + b),$$
$$\sin a \cos b + \cos a \sin b = \sin(a + b),$$

on peut donc écrire

$$(\cos a + i \sin a)(\cos b + i \sin b) = \cos(a + b) + i \sin(a + b).$$

Soient maintenant $\rho(\cos a + i \sin a)$, $\rho'(\cos b + i \sin b)$ deux expressions imaginaires dont les modules sont $\rho$ et $\rho'$; on a

$$\rho(\cos a + i\sin a) \times \rho'(\cos b + i\sin b)$$
$$= \rho\rho' \times (\cos a + i\sin a) . (\cos b + i\sin b),$$

et, par conséquent,

$$\rho(\cos a + i\sin a) \times \rho'(\cos b + i\sin b)$$
$$= \rho\rho' [\cos(a+b) + i\sin a + b)].$$

Le théorème est donc démontré.

Corollaire I. — *Le module et l'argument du produit de tant d'expressions imaginaires que l'on voudra sont égaux respectivement au produit des modules et à la somme des arguments des facteurs.*

En effet, pour multiplier les deux premiers facteurs, on multiplie leurs modules et on ajoute leurs arguments. Pour multiplier ce produit par le troisième facteur, il faut multiplier son module par celui du troisième facteur, et ajouter à son argument celui de ce troisième facteur; et ainsi de suite.

Corollaire II. — *Pour élever une expression imaginaire à une puissance entière et positive de degré m, il faut élever le module à la puissance m, et multiplier l'argument par m.*

Cela résulte immédiatement du corollaire I, en supposant égales toutes les expressions imaginaires que l'on y considère.

Soit, en particulier, $\cos a + i \sin a$, une expression imaginaire du module 1; on a

$$(\cos a + i\sin a)^m = \cos ma + i\sin ma.$$

C'est dans cette égalité que consiste la formule de Moivre.

*De la multiplication des arcs.*

187. La formule de Moivre donne immédiatement les

valeurs de $\cos ma$ et de $\sin ma$, en fonction de $\cos a$ et de $\sin a$. Si, en effet, on développe le second membre de l'égalité

$$\cos ma + i \sin ma = (\cos a + i \sin a)^m,$$

en ayant soin de rabaisser les exposants de $i$ au-dessous de 2, à l'aide de l'équation $i^2 = -1$, il vient

$$\cos ma + i \sin ma$$

$$= \left[ \begin{array}{l} \cos^m a - \frac{m(m-1)}{1.2} \cos^{m-2} a \sin^2 a \\ + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4} \cos^{m-4} a \sin^4 a - \ldots \end{array} \right]$$

$$+ i \left[ \begin{array}{l} \frac{m}{1} \cos^{m-1} a \sin a - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} \cos^{m-3} a \sin^3 a \\ \qquad + \frac{m \ldots (m-4)}{1.2.3.4.5} \cos^{m-5} a \sin^5 a - \ldots \end{array} \right],$$

c'est-à-dire

$$(1) \left\{ \begin{array}{l} \cos ma = \cos^m a - \frac{m(m-1)}{1.2} \cos^{m-2} a \sin^2 a \\ \qquad + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4} \cos^{m-4} a \sin^4 a - \ldots, \\ \sin ma = m \cos^{m-1} a \sin a - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} \cos^{m-3} a \sin^3 a \\ \qquad + \frac{m(m-1) \ldots (m-4)}{1.2.3.4.5} \cos^{m-5} a \sin^5 a - \ldots \end{array} \right.$$

Ces formules font connaître $\cos ma$ et $\sin ma$ en fonction de $\cos a$ et $\sin a$; en remplaçant successivement $\sin a$ par $\sqrt{1-\cos^2 a}$ et $\cos a$ par $\sqrt{1-\sin^2 a}$, on aura les valeurs de $\cos ma$ et de $\sin ma$ en fonction de $\cos a$ ou de $\sin a$ seulement. Il y a une remarque importante à faire à ce sujet.

**188.** Les termes des seconds membres des équations (1) sont tous du degré $m$ par rapport à $\sin a$ et $\cos a$; la première de ces équations ne contient que des puissances paires de $\sin a$ et que des puissances paires ou impaires de $\cos a$, suivant que $m$ est pair ou impair. La seconde équa-

tion, au contraire, ne contient que des puissances impaires de $\sin a$, et que des puissances impaires ou paires de $\cos a$, suivant que $m$ est pair ou impair. On peut conclure de là :

1°. Que $\cos ma$ et $\dfrac{\sin ma}{\sin a}$ sont exprimables, en fonction de $\cos a$, par des polynômes entiers et rationnels, le premier du degré $m$, le second du degré $m-1$, et dont tous les termes ont des degrés de même parité ;

2°. Que $\cos ma$ et $\dfrac{\sin ma}{\cos a}$, si $m$ est pair, ou $\sin ma$ et $\dfrac{\cos ma}{\cos a}$, si $m$ est impair, sont exprimables, en fonction de $\sin a$, par des polynômes entiers et rationnels, le premier du degré $m$, le second du degré $m-1$, et dont tous les termes ont des degrés de même parité.

**189.** Si, dans la formule

$$\cos ma + i \sin ma = (\cos a + i \sin a)^m,$$

on change $a$ en $-a$, il vient

$$\cos ma - i \sin ma = (\cos a - i \sin a)^m ;$$

des équations précédentes on déduit

$$(2)\qquad \begin{cases} \cos ma = \dfrac{(\cos a + i \sin a)^m + (\cos a - i \sin a)^m}{2}, \\ \sin ma = \dfrac{(\cos a + i \sin a)^m - (\cos a - i \sin a)^m}{2i}. \end{cases}$$

Il est souvent utile de prendre sous cette forme les valeurs de $\cos ma$ et de $\sin ma$.

**190.** En divisant la seconde des équations (1) par la première, il vient

$$\frac{\sin ma}{\cos ma} = \frac{m \cos^{m-1} a \sin a - \dfrac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} \cos^{m-3} \sin^3 a + \ldots}{\cos^m a - \dfrac{m(m-1)}{1.2} \cos^{m-2} a \sin^2 a + \ldots},$$

$$= \frac{m \dfrac{\sin a}{\cos a} - \dfrac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} \dfrac{\sin^3 a}{\cos^3 a} + \ldots}{1 - \dfrac{m(m-1)}{1.2} \dfrac{\sin^2 a}{\cos^2 a} + \ldots}$$

ou

$$(3)\quad \tang ma = \frac{m \tang a - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\tang^3 a + \ldots}{1 - \frac{m(m-1)}{1.2}\tang^2 a + \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}\tang^4 a - \ldots}$$

formule qui fait connaître tang $ma$ en fonction rationnelle de tang $a$.

*De la division des arcs.*

**191.** *Trouver* $\cos\frac{a}{m} = x$, *connaissant* $\cos a = A$.

Si dans la première des équations (1) du n° **187** on change $a$ en $\frac{a}{m}$, et que l'on remplace ensuite $\cos\frac{a}{m}$, $\sin\frac{a}{m}$ et $\cos a$ par $x$, $\sqrt{1-x^2}$ et A, il vient, d'après la remarque du n° **188**,

$$(1)\qquad f(x) - A = 0,$$

$f(x)$ désignant un polynôme du degré $m$ dont tous les termes ont des degrés de même parité. Le problème dépend donc d'une équation de degré $m$; c'est ce qu'on peut établir à priori. Soit $\alpha$ le plus petit arc positif ayant A pour cosinus; les valeurs de $a$ sont comprises dans la formule $2k\pi \pm \alpha$, et on doit satisfaire à l'équation (1) en prenant pour $x$ le cosinus de l'un quelconque des arcs

$$\frac{2k\pi}{m} + \frac{\alpha}{m},\quad \frac{2k\pi}{m} - \frac{\alpha}{m},$$

où $k$ désigne toujours un entier indéterminé. Si l'on donne à $k$, dans l'une de ces formules, deux valeurs qui diffèrent d'un multiple de $m$, on obtient deux arcs qui diffèrent d'un multiple de la circonférence et dont les cosinus sont égaux; il suffit donc de donner, à $k$, $m$ valeurs consécutives quelconques, $0, 1, 2, \ldots, m-1$ par exemple. Il est même inutile de considérer les deux formules; car si l'on donne à $k$ une certaine valeur dans la première, et dans la seconde

une valeur complémentaire à $m$, on obtient deux arcs dont la somme est égale à $2\pi$, et qui ont, par suite, le même cosinus. D'après cela, l'inconnue $x$ n'est susceptible que de $m$ valeurs qui sont généralement distinctes. Ce sont les cosinus des $m$ arcs

$$\frac{\alpha}{m}, \quad \frac{2\pi}{m}+\frac{\alpha}{m}, \quad \frac{4\pi}{m}+\frac{\alpha}{m}, \ldots, \quad \frac{2(m-1)\pi}{m}+\frac{\alpha}{m}.$$

Nous ne pourrions, sans sortir des limites naturelles de notre sujet, nous occuper ici de la résolution algébrique de l'équation (1), mais nous devons remarquer que si $m$ est un nombre composé $np$, la résolution de cette équation (1), qui est du degré $m$, se ramène immédiatement à la résolution de deux équations, l'une du degré $n$ et l'autre du degré $p$. Si, en effet, on pose $\cos\frac{a}{n}=y$, on aura, pour déterminer $x$, une équation de degré $p$ telle que

$$\psi(x)-y=0,$$

$y$ étant donné par une équation de degré $n$,

$$\varpi(y)-\mathrm{A}=0.$$

L'équation (1) résulterait d'ailleurs de l'élimination de $y$ entre ces deux dernières. De même, si $n$ était un nombre composé $qr$, la résolution de l'équation $\varpi(y)-\mathrm{A}=0$ se ramènerait à celle de deux équations des degrés $q$ et $r$; et ainsi de suite.

**192.** Supposons que $m$ soit un nombre impair premier ou non, et examinons le cas particulier de $\mathrm{A}=1$; on a $\alpha=0$, l'équation (1) devient

$$(2) \qquad f(x)-1=0,$$

et ses racines sont les cosinus des arcs

$$0, \quad \frac{2\pi}{m}, \quad \frac{4\pi}{m}, \ldots, \quad \frac{2(m-1)\pi}{m}.$$

Le premier de ces arcs a pour cosinus l'unité, et les autres

étant deux à deux *complémentaires* à la circonférence ont le même cosinus : il suit de là que le premier membre de l'équation (2) est divisible par $x-1$ et que le quotient est un carré $(\varphi x)^2$; on a donc

$$f(x)=1+(x-1)(\varphi x)^2.$$

Par conséquent, l'équation (1) peut être mise sous la forme

$$(x-1)(\varphi x)^2+1-A=0,$$

où $\varphi(x)$ désigne un polynôme du degré $\frac{m-1}{2}$ dont les racines sont les cosinus des arcs

$$\frac{2\pi}{m},\quad \frac{4\pi}{m},\ldots,\quad \frac{(m-1)\pi}{m}.$$

On voit enfin que la détermination de $\cos\frac{2\pi}{m}$ ne dépend que d'une équation de degré $\frac{m-1}{2}$.

Nous donnerons plus loin un moyen simple de former le polynôme $\varphi(x)$.

193. *Trouver* $\sin\frac{a}{m}=x$, *connaissant* $\sin a=A$.

Si dans la deuxième des équations (1) du n° 187 on change $a$ en $\frac{a}{m}$, et que l'on remplace ensuite $\sin\frac{a}{m}$. $\cos\frac{a}{m}$ et $\sin A$ par $x$, $\sqrt{1-x^2}$ et A, il vient, si $m$ est impair,

$$f(x)-A=0,$$

$f(x)$ désignant un polynôme entier et rationnel du degré $m$ dont tous les termes sont de degrés impairs. On voit que le problème est du degré $m$. Mais si $m$ est pair, on obtient une équation de la forme

$$\sqrt{1-x^2}f(x)=A,$$

où $f(x)$ désigne un polynôme de degré $m-1$ dont tous les termes sont de degrés impairs. En élevant au carré les

deux membres, il vient

$$(1 - x^2)(fx)^2 - A^2 = 0.$$

On voit que le problème dépend d'une équation de degré $2m$. A la vérité, cette équation peut être abaissée au degré $m$ en posant $x^2 = \xi$, parce qu'elle ne contient que des puissances paires de $x$.

On arrive aux mêmes conséquences par les considérations dont nous avons tant de fois fait usage. En désignant par $\alpha$ le plus petit arc positif ayant A pour sinus, et par $k$ un entier indéterminé, les valeurs de $x$ sont les sinus des arcs

$$\frac{2k\pi}{m} + \frac{\alpha}{m}, \quad \frac{(2k+1)\pi}{m} - \frac{\alpha}{m}.$$

Il suffit de donner, à $k$, $m$ valeurs consécutives, $0, 1, 2, \ldots, m-1$ par exemple; car en donnant à $k$ deux valeurs qui diffèrent d'un multiple de $m$, chaque formule fournit deux arcs qui ont même sinus. Deux arcs d'une même formule ne peuvent avoir même sinus tant que $\alpha$ reste indéterminé, car leur différence est inférieure à $2\pi$, et leur somme, qui contient $\alpha$, ne peut être égale à un nombre impair de demi-circonférences que pour des valeurs particulières de $\alpha$. Voyons si deux arcs, tels que

$$\frac{2k\pi}{m} + \frac{\alpha}{m}, \quad \frac{(2k'+1)\pi}{m} - \frac{\alpha}{m},$$

peuvent avoir même sinus. Leur différence contient $\alpha$ et ne sera pas en général égale à un nombre pair de demi-circonférences : leur somme est égale à

$$\frac{2k + 2k' + 1}{m}\pi,$$

et ne peut être égale à un nombre impair de demi-circonférences si $m$ est pair; donc, dans ce cas, $x$ est susceptible de $2m$ valeurs distinctes. Mais si $m$ est impair, on peut toujours, quel que soit le nombre $k$ compris entre $0$ et $m$,

trouver un entier $k'$ également compris entre o et $m$, tel qu'on ait

$$2k + 2k' + 1 = m \quad \text{ou} \quad 3m,$$

c'est-à-dire

$$k' = \frac{m-1}{2} - k \quad \text{ou} \quad = \frac{3m-1}{2} - k;$$

donc, si $m$ est impair, $x$ n'est susceptible que de $m$ valeurs.

Il est aisé de voir que les $m$ arcs de chaque formule ont, dans le cas de $m$ pair, leurs sinus égaux deux à deux et de signes contraires.

Ce problème donne lieu à des remarques semblables à celles du n° **191**, mais qu'il suffit d'avoir faites une fois.

**194.** On verrait de même que si l'on donne $\cos a$, la détermination de $\sin \frac{a}{m}$ dépend d'une équation de degré $2m$, et que si l'on donne $\sin a$, celle de $\cos \frac{a}{m}$ dépend d'une équation de degré $m$ ou de degré $2m$, suivant que $m$ est impair ou pair. Enfin, quand on donne $\tang a$, $\tang \frac{a}{m}$ dépend dans tous les cas d'une équation de degré $m$.

### *Résolution de l'équation binôme* $z^m = 1$.

**195.** Proposons-nous de trouver les racines de l'équation binôme

$$(1) \qquad z^m = 1.$$

Toute expression imaginaire dont la puissance $m$ est 1 ou a pour module 1, a elle-même pour module l'unité (n° **186**); si donc l'équation (1) admet une racine imaginaire, cette racine a la forme $\cos\varphi + i\sin\varphi$. Pour que cette expression soit effectivement racine, il faut et il suffit que l'on ait

$$\cos m\varphi + i \sin m\varphi = 1,$$

c'est-à-dire

$$\cos m\varphi = 1, \quad \sin m\varphi = 0,$$

ou

$$m\varphi = 2k\pi \quad \text{et} \quad \varphi = \frac{2k\pi}{m},$$

en désignant par $k$ un entier.

Ainsi l'équation (1) est satisfaite par toutes les valeurs de $z$ comprises dans la formule

$$(2) \qquad z = \cos\frac{2k\pi}{m} + i\sin\frac{2k\pi}{m}.$$

Pour que deux valeurs $k'$ et $k''$ de $k$ correspondent à deux valeurs égales de $z$, il faut et il suffit (n° 185) que la différence des arguments $\frac{2k'\pi}{m}$, $\frac{2k''\pi}{m}$ soit un multiple de $2\pi$, ou, en d'autres termes, que $k' - k''$ soit un multiple de $m$. La formule (2) donne donc $m$ valeurs distinctes pour $z$, et n'en donne pas davantage; on les obtiendra en donnant, à $k$, $m$ valeurs consécutives quelconques entre $-\infty$ et $+\infty$,

$$0, \ 1, \ 2, \ldots, \ m-1$$

par exemple.

L'équation (1) a une ou deux racines réelles, suivant que $m$ est impair ou pair. Les racines imaginaires sont conjuguées deux à deux : dans tous les cas, on obtient deux racines conjuguées en donnant à $k$ deux valeurs complémentaires à $m$ dans la formule (2); car, en changeant $k$ en $m-k$, cette formule devient

$$z = \cos\frac{2k\pi}{m} - i\sin\frac{2k\pi}{m}.$$

Il suit de là que les $m$ racines de l'équation (1) sont comprises dans la formule

$$z = \cos\frac{2k\pi}{m} \pm i\sin\frac{2k\pi}{m},$$

où il suffit de donner à $k$ les valeurs $0, 1, 2, \ldots, \frac{m}{2}$ si $m$ est pair, et les valeurs $0, 1, 2, \ldots, \frac{m-1}{2}$ si $m$ est im-

pair. Dans le premier cas, les deux racines réelles correspondent à $k=0$ et $k=\frac{m}{2}$; dans le second cas, la racine réelle correspond à $k=0$.

**196.** Supposons $m$ impair; l'équation $z^m-1=0$ s'abaisse au degré $\frac{m-1}{2}$, il suffit de la diviser par $z-1$, et de poser ensuite

$$z+\frac{1}{z}=x.$$

On obtient ainsi une équation en $x$,

$$\varphi(x)=0,$$

du degré $\frac{m-1}{2}$, et dont les racines sont, comme l'on sait, les doubles des parties réelles des racines imaginaires de la proposée. Ces racines sont donc représentées par la formule

$$x=2\cos\frac{2k\pi}{m},$$

où l'on doit donner à $k$ toutes les valeurs $1, 2, \ldots, \frac{m-1}{2}$; par conséquent, le polynôme $\varphi(x)$ ne diffère de celui qu'on désignait par la même lettre au n° **192** que par le facteur 2 qui multiplie toutes les racines.

**197.** *Propriétés des racines de l'équation* $z^m=1$.

1°. Si l'on fait

$$\alpha=\cos\frac{2\pi}{m}+i\sin\frac{2\pi}{m},$$

on a, par la formule de Moivre,

$$\alpha^k=\cos\frac{2k\pi}{m}+i\sin\frac{2k\pi}{m};$$

par conséquent, *les $m$ racines de l'équation $z^m=1$ peuvent être représentées par*

$$\alpha^0,\ \alpha^1,\ \alpha^2,\ldots,\ \alpha^{m-1},$$

*c'est-à-dire par les puissances d'une d'entre elles.*

2°. Si l'on a $m = np$, $n$ et $p$ étant deux nombres premiers entre eux, on obtiendra toutes les racines de $z^m = 1$, en multipliant les $n$ racines de $z^n = 1$ par les $p$ racines de $z^p = 1$.

En effet, soit $\alpha = \cos\frac{2k\pi}{np} + i\frac{\sin 2k\pi}{np}$ une racine de $z^{np} = 1$ ; $n$ et $p$ étant premiers entre eux, on peut trouver deux entiers $\xi$ et $\eta$, tels que

$$p\xi + n\eta = k \quad \text{ou} \quad \frac{2\xi\pi}{n} + \frac{2\eta\pi}{p} = \frac{2k\pi}{np},$$

et alors on a

$$\alpha = \left(\cos\frac{2\xi\pi}{n} + i\sin\frac{2\xi\pi}{n}\right)\left(\cos\frac{2\eta\pi}{p} + i\sin\frac{2\eta\pi}{p}\right):$$

d'où l'on conclut que toute racine de $z^{np} = 1$ est le produit d'une racine de $z^n = 1$ par une de $z^p = 1$ : par conséquent *les np racines de l'équation* $z^{np} = 1$ *sont les produits que l'on obtient en multipliant les n racines de* $z^n = 1$ *par les p racines de* $z^p = 1$.

3°. *La résolution algébrique de l'équation* $z^m = 1$ *où m est un nombre composé se ramène à la résolution des équations de même forme ayant pour degrés les nombres premiers ou puissances de nombres premiers qui divisent m.*

En effet, soit $m = npq\ldots$; $n$, $p$, $q\ldots$ étant des nombres premiers ou des puissances de nombres premiers inégaux, on aura les racines de l'équation $z^{np} = 1$ en multipliant celles de $z^n = 1$ par celles de $z^p = 1$. Pareillement, on aura les racines de $z^{npq} = 1$ en multipliant celles de $z^{np} = 1$ par celles de $z^q = 1$, et ainsi de suite. D'où l'on peut conclure que les diverses racines de $z^m = 1$ s'obtiendront toutes en multipliant une racine de $z^n = 1$ par une de $z^p = 1$, puis par une de $z^q = 1$, etc.

*Des polygones réguliers.*

198. Concevons une circonférence partagée en $m$ parties égales, et joignons les points de division consécutifs; on aura le polygone régulier inscrit de $m$ côtés. Si $n$ est un nombre inférieur et premier à $m$, et que l'on joigne les points de division de $n$ en $n$, ou, ce qui est la même chose, de $m-n$ en $m-n$, on ne reviendra au point de départ qu'après avoir passé par tous les sommets, et la figure que l'on aura formée est appelée *polygone régulier étoilé*. Mais si $m$ et $n$ ont un diviseur commun $\theta$, on ne passera que par un nombre $\frac{m}{\theta}$ de sommets, et la figure obtenue sera un polygone régulier de $\frac{m}{\theta}$ côtés seulement. On voit, d'après cela, qu'il y a autant de polygones réguliers de $m$ côtés que de nombres premiers à $m$, et inférieurs à la moitié de $m$.

Le problème de la division de la circonférence en $m$ parties égales se ramène à résoudre algébriquement l'équation binôme

$$z^m = 1,$$

car on a vu que les racines de cette équation sont données par la formule

$$z = \cos\frac{2k\pi}{m} + i\sin\frac{2k\pi}{m}.$$

D'ailleurs $\frac{2k\pi}{m}$ est l'arc sous-tendu par le côté du polygone obtenu en joignant les points de division de $k$ en $k$, et l'on connaîtra par conséquent les lignes trigonométriques de cet arc si l'on peut résoudre l'équation $z^m = 1$.

Enfin on a vu que si $m$ est un nombre composé, la résolution de l'équation $z^m = 1$ se ramène à celle d'équations de même forme dont les degrés sont les nombres premiers

ou puissances de nombres premiers qui divisent $m$; donc le problème de la division de la circonférence en $m$ parties égales est susceptible de la même simplification.

Nous allons examiner en détail la division en trois, cinq et quinze parties égales.

**199.** *Division de la circonférence en trois parties égales.* — Elle dépend de l'équation

$$z^3 - 1 = 0;$$

ôtant la racine 1, il vient

$$z^2 + z + 1 = 0,$$

et, en faisant $z + \frac{1}{z} = x$,

$$x + 1 = 0.$$

La racine $-1$ de cette équation est égale à $2\cos\frac{2\pi}{3}$, ou $-2\cos\frac{\pi}{3}$, ou $-2\sin\frac{\pi}{6}$; on a donc

$$2\sin\frac{\pi}{6} = 1.$$

C'est la valeur du côté de l'hexagone dont on déduit facilement le côté du triangle équilatéral.

**200.** *Division de la circonférence en cinq parties égales.* — Elle dépend de l'équation

$$z^5 - 1 = 0;$$

ôtant la racine 1, et faisant $z + \frac{1}{z} = x$, il vient

$$x^2 + x - 1 = 0,$$

qui a pour racines

$$2\cos\frac{2\pi}{5}, \quad 2\cos\frac{4\pi}{5},$$

ou

$$2\sin\frac{\pi}{10}, \quad -2\sin\frac{3\pi}{10}.$$

On a, d'ailleurs, en résolvant l'équation, $x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$; donc

$$2 \sin \frac{\pi}{10} = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, \qquad 2 \sin \frac{3\pi}{10} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

Ce sont les valeurs des côtés des décagones réguliers ordinaire et étoilé; on en déduirait facilement les côtés des pentagones ordinaire et étoilé.

**201.** *Division de la circonférence en quinze parties égales.* — Elle dépend de l'équation

$$(1) \qquad z^{15} - 1 = 0,$$

dont il faut ôter les racines de $z^3 - 1 = 0$ et de $z^5 - 1 = 0$; divisant donc cette équation par $\frac{(z^3-1)(z^5-1)}{z-1}$, il vient

$$(2) \qquad z^8 - z^7 + z^5 - z^4 + z^3 - z + 1 = 0.$$

Enfin, en divisant par $z^4$ et posant $z + \frac{1}{z} = x$, il vient

$$(3) \qquad x^4 - x^3 - 4x^2 + 4x + 1 = 0;$$

cette équation a pour racines

$$2\cos\frac{2\pi}{15}, \quad 2\cos\frac{4\pi}{15}, \quad 2\cos\frac{8\pi}{15}, \quad 2\cos\frac{14\pi}{15},$$

ou

$$2\sin\frac{11\pi}{30}, \quad 2\sin\frac{7\pi}{30}, \quad -2\sin\frac{\pi}{30}, \quad -2\sin\frac{13\pi}{30}.$$

Ce sont, en valeur absolue, les côtés des polygones réguliers ordinaire et étoilés de trente côtés.

Les quinze racines de l'équation (1) s'obtiennent en multipliant les trois de $z^3 - 1 = 0$ par les cinq de $z^5 - 1 = 0$ (n° 197); on en conclut facilement que les huit racines de l'équation (2) s'obtiennent en multipliant les deux racines de $z^2 + z + 1 = 0$ par les quatre de $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$, qu'on peut facilement trouver : on connaîtra donc ainsi les

huit racines de l'équation (2), et, par suite, celles de l'équation (3).

Des considérations algébriques fort simples font voir d'ailleurs que l'équation (3) résulte de l'élimination de $y$ entre les deux équations

$$x^2 - yx + (y - 2) = 0, \quad y^2 - y - 1 = 0,$$

en sorte que sa résolution est ramenée à celle de deux équations du second degré.

*Résolution des équations binôme et trinôme.*

**202.** Proposons-nous maintenant de résoudre l'équation binôme générale

$$z^m = A + Bi,$$

où A et B sont des nombres donnés positifs, nuls ou négatifs. En désignant par $\rho$ et $a$ le module et l'argument de $A + Bi$, l'équation devient

(1) $$z^m = \rho(\cos a + i \sin a).$$

Posons maintenant

(2) $$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

on aura

$$z^m = r^m(\cos m\varphi + i \sin m\varphi);$$

et, pour que la valeur (2) de $z$ satisfasse à l'équation (1), il faut et il suffit (nº 185) que l'on ait

$$r^m = \rho, \quad m\varphi = 2k\pi + a,$$

d'où

$$r = \sqrt[m]{\rho}, \quad \varphi = \frac{2k\pi + a}{m}.$$

Les racines de l'équation proposée sont donc données par la formule

(3) $$z = \sqrt[m]{\rho}\left(\cos\frac{2k\pi + a}{m} + i \sin\frac{2k\pi + a}{m}\right),$$

où $k$ désigne un entier indéterminé.

Pour que deux valeurs de $k$ correspondent à deux valeurs égales de $z$, il faut et il suffit, comme au n° 195, que leur différence soit un multiple de $m$; l'équation (3) comprend donc, comme cela doit être, $m$ racines distinctes que l'on obtient en donnant, à $k$, $m$ valeurs consécutives quelconques entre $-\infty$ et $+\infty$,

$$0, \quad 1, \quad 2, \ldots, \quad m-1,$$

par exemple.

La formule (3) peut s'écrire ainsi :

$$z = \sqrt[m]{\rho}\left(\cos\frac{a}{m} + i\sin\frac{a}{m}\right)\left(\cos\frac{2k\pi}{m} + i\sin\frac{2k\pi}{m}\right).$$

$\sqrt[m]{\rho}\left(\cos\frac{a}{m} + i\sin\frac{a}{m}\right)$ est l'une des racines de l'équation (1), $\cos\frac{2k\pi}{m} + i\sin\frac{2k\pi}{m}$ est l'expression des racines $m^{\text{ièmes}}$ de l'unité; d'où il suit qu'on obtient les $m$ racines de l'équation (1), en multipliant l'une d'elles par les $m$ racines $m^{\text{ièmes}}$ de l'unité. D'après ce qu'on a vu au n° 195, on peut encore représenter les racines de l'équation (1) par la formule

$$(4) \qquad z = \sqrt[m]{\rho}\left(\cos\frac{a}{m} + i\sin\frac{a}{m}\right)\left(\cos\frac{2k\pi}{m} \pm i\sin\frac{2k\pi}{m}\right),$$

où il suffit de donner à $k$ les valeurs $0, 1, 2, \ldots, \frac{m}{2}$, si $m$ est pair, et les valeurs $0, 1, 2, \ldots, \frac{m-1}{2}$, si $m$ est impair.

**203.** Dans le cas particulier où B est nul, on a $\rho = A$ ou $\rho = -A$, suivant que A est positif ou négatif, et l'on peut prendre $a = 0$ ou $a = \pi$, suivant que $m$ est pair ou impair; d'après cela, les racines de l'équation

$$z^m = +A$$

sont données par la formule

$$(5) \qquad z = \sqrt[m]{A}\left(\cos\frac{2k\pi}{m} \pm i\sin\frac{2k\pi}{m}\right),$$

et celles de l'équation

$$z^m = -A$$

par la formule

(6) $$z = \sqrt[m]{A}\left(\cos\frac{(2k+1)\pi}{m} \pm i\sin\frac{(2k+1)\pi}{m}\right).$$

Dans les formules (5) et (6) il suffit de donner à $k$ les valeurs comprises entre o et $\frac{m}{2}$.

**204.** Soit maintenant l'équation trinôme

(1) $$z^{2m} + pz^m + q = 0,$$

où $p$ et $q$ sont donnés ; on en tire

(2) $$z^m = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q},$$

et l'on est ramené à résoudre deux équations binômes.

Considérons en particulier le cas où $p$ et $q$ étant des nombres réels, on a

$$\frac{p^2}{4} - q < 0,$$

et soit

$$-\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} - q} = \rho(\cos a + i\sin a);$$

l'équation (1) a la forme

$$z^{2m} - 2\rho z^m \cos a + \rho^2 = 0,$$

et l'équation (2) devient

$$z^m = \rho(\cos a \pm i\sin a).$$

Les racines de l'équation $z^m = \rho(\cos a + i\sin a)$ sont comprises dans la formule

$$z = \sqrt[m]{\rho}\left(\cos\frac{2k\pi + a}{m} + i\sin\frac{2k\pi + a}{m}\right),$$

où l'on donnera à $k$ les valeurs $0, 1, 2, \ldots, m-1$; de même les racines de l'équation $z^m = \rho(\cos a - i \sin a)$ peuvent être représentées par la formule

$$z = \sqrt[m]{\rho}\left(\cos\frac{2k\pi - a}{m} + i\sin\frac{2k\pi - a}{m}\right)$$

où l'on donnera à $k$ les $m$ valeurs consécutives $0, -1, -2, \ldots, -(m-1)$. Par conséquent, les $2m$ racines de l'équation proposée sont toutes comprises dans la formule

$$z = \sqrt[m]{\rho}\left(\cos\frac{2k\pi + a}{m} \pm i\sin\frac{2k\pi + a}{m}\right),$$

où il suffit de prendre, pour $k$, $m$ nombres entiers consécutifs.

*Formule de Moivre pour un exposant quelconque.*

**205.** L'égalité

$$\cos a + i\sin a = \left(\cos\frac{a}{n} + i\sin\frac{a}{n}\right)^n$$

montre que $\cos\frac{a}{n} + i\sin\frac{a}{n}$ est une racine $n^{ième}$ de $\cos a + i\sin a$; pareillement, $\cos\frac{ma}{n} + i\sin\frac{ma}{n}$ est une racine $n^{ième}$ de $\cos ma + i\sin ma$ ou de $(\cos a + i\sin a)^m$; on peut donc écrire

$$\sqrt[n]{(\cos a + i\sin a)^m} = \cos\frac{m}{n}a + i\sin\frac{m}{n}a,$$

ou

$$(\cos a + i\sin a)^{\frac{m}{n}} = \cos\frac{m}{n}a + i\sin\frac{m}{n}a.$$

C'est la formule de Moivre étendue au cas d'un exposant fractionnaire $\frac{m}{n}$; mais il faut bien faire attention que le second membre ne représente qu'une seule des $n$ valeurs dont

le premier est susceptible. On obtiendra d'ailleurs toutes ces valeurs (n° 202) en multipliant le second membre par $\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}$.

La formule de Moivre a lieu encore pour un exposant négatif $-m$, que $m$ soit entier ou non; en effet, l'équation

$$(\cos a + i\sin a)^m = \cos ma + i\sin ma,$$

donne

$$\frac{1}{(\cos a + i\sin a)^m} = \frac{1}{\cos ma + i\sin ma} = \cos ma - i\sin ma,$$

ou

$$(\cos a + i\sin a)^{-m} = \cos(-ma) + i\sin(-ma).$$

*Théorèmes de Moivre et de Cotes.*

206. Les théorèmes de Moivre et de Cotes ont pour but de donner une représentation géométrique des diviseurs réels du trinôme $x^{2m} \pm 2x^m\cos a + 1$, où $a$ est un angle donné, et du binôme $x^m \pm 1$.

Les deux facteurs linéaires qui correspondent à deux racines conjuguées de l'équation

$$x^{2m} - 2x^m\cos a + 1 = 0,$$

sont représentés par

$$x - \left(\cos\frac{2k\pi + a}{m} + i\sin\frac{2k\pi + a}{m}\right),$$

et

$$x - \left(\cos\frac{2k\pi + a}{m} - i\sin\frac{2k\pi + a}{m}\right);$$

le produit de ces facteurs est

$$y_k^2 = x^2 - 2x\cos\frac{2k\pi + a}{m} + 1,$$

et l'on a identiquement

(1) $$x^{2m} - 2x^m\cos a + 1 = (y_0 y_1 y_2 \ldots y_{m-1})^2.$$

Changeons $a$ en $\pi + a$, et faisons

$$y_k'^2 = x^2 - 2x\cos\frac{(2k+1)\pi + a}{m} + 1,$$

on aura

(2) $$x^{2m} + 2x^m\cos a + 1 = (y'_0 y'_1 \ldots y'_{m-1})^2.$$

Cela posé, considérons une circonférence de rayon 1, partageons-la en $2m$ parties égales aux points $A_0$, $A_1$, $A_2, \ldots$, $A_{2m-1}$, joignons le centre O à tous ces points et menons une ligne OP faisant un angle égal à $\frac{a}{m}$ avec le premier rayon $OA_0$; enfin prenons sur cette ligne une longueur quelconque $OP = x$, et joignons le point P à tous les points de division. Les triangles $OPA_{2m-2k}$ et $OPA_{2m-2k-1}$ donnent

$$\overline{PA}^2_{2m-2k} = x^2 - 2x\cos\frac{2k\pi + a}{m} + 1,$$

$$\overline{PA}^2_{2m-2k-1} = x^2 - 2x\cos\frac{(2k+1)\pi + a}{m} + 1,$$

et, par conséquent,

$$PA_{2m-2k} = y_k \quad \text{et} \quad PA_{2m-2k-1} = y'_k.$$

Il résulte de là que le trinôme $x^{2m} - 2x^m\cos a + 1$ est égal au carré du produit des distances du point P aux points $A_0$, $A_2$, $A_4, \ldots$, et que le trinôme $x^{2m} + 2x^m\cos a + 1$ est égal au carré du produit des distances du même point P aux points $A_1$, $A_3$, $A_5, \ldots$; c'est dans ces égalités que consiste le théorème de Moivre.

Si l'angle $a$ est nul, le point P est situé sur le rayon $OA_0$, et les équations (1) et (2) donnent, en extrayant les racines carrées des deux membres,

$$x^m - 1 = \pm y_0 y_1 \ldots y_{m-1},$$
$$x^m + 1 = y'_0 y'_1 \ldots y'_{m-1}.$$

C'est dans ces égalités que consiste le théorème de Cotes; on doit prendre le signe + ou le signe — dans le second

membre de la première, suivant que le point P est extérieur ou intérieur au cercle.

*Résolution de l'équation du troisième degré.*

**207.** Comme on peut toujours faire disparaître le second terme d'une équation, nous prendrons l'équation du troisième degré ramenée à la forme

(1) $$x^3 + px + q = 0,$$

et nous supposerons $p$ et $q$ réels. Posons

$$x = y + z;$$

l'équation devient

$$(y+z)^3 + p(y+z) + q = 0,$$

ou

$$y^3 + z^3 + (p + 3yz)(y+z) + q = 0.$$

On peut disposer à volonté de l'une des indéterminées $y$ et $z$. Si l'on fait

(2) $$yz = -\frac{p}{3},$$

il vient

(3) $$y^3 + z^3 = -q;$$

$y^3$ et $z^3$ sont donc les racines de l'équation du second degré

$$t^2 - qt - \frac{p^3}{27} = 0.$$

On déduit de là

(4) $$\begin{cases} y^3 = -\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}, \\ z^3 = -\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}. \end{cases}$$

Ces équations (4) donnent trois valeurs pour $y$ et trois pour $z$; mais il ne faut associer ensemble, pour avoir une racine $y + z$ de l'équation (1), que les valeurs de $y$ et

de $z$ qui satisfont à l'équation (2), c'est-à-dire qui ont un produit réel.

208. Supposons $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}$ nul ou négatif, ce qui exige que $p$ soit négatif, et posons

$$-\frac{q}{2}=\rho\cos\omega,\quad \frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=-\rho^2\sin^2\omega;$$

on aura, pour déterminer $\rho$ et $\omega$,

$$\rho=\sqrt{\frac{-p^3}{27}},\quad \cos\omega=\frac{-\frac{q}{2}}{\sqrt{\frac{-p^3}{27}}},$$

et les équations (4) deviennent

$$y^3=\rho(\cos\omega+i\sin\omega),$$
$$z^3=\rho(\cos\omega-i\sin\omega);$$

d'où

$$y=\sqrt[3]{\rho}\left(\cos\frac{2k\pi+\omega}{3}+i\sin\frac{2k\pi+\omega}{3}\right),$$
$$z=\sqrt[3]{\rho}\left(\cos\frac{2k\pi+\omega}{3}-i\sin\frac{2k\pi+\omega}{3}\right),$$

où l'on doit donner à $k$ les trois valeurs 0, 1, 2. Il faut que $k$ ait la même valeur dans ces deux formules pour que le produit $yz$ soit réel, par conséquent les racines de la proposée sont données par la formule

$$x=2\sqrt[3]{\rho}\cos\frac{2k\pi+\omega}{3};$$

ces racines sont donc

$$2\sqrt[3]{\rho}\cos\frac{\omega}{3},\quad 2\sqrt[3]{\rho}\cos\frac{2\pi+\omega}{3},\quad 2\sqrt[3]{\rho}\cos\frac{4\pi+\omega}{3}.$$

Ces expressions sont calculables par logarithmes. On voit que les trois racines de la proposée sont réelles. Les deux dernières sont égales entre elles si $\omega$ est nul, c'est-à-dire si $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}=0$.

**209.** Supposons maintenant $\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}$ positif, et désignons par A et B les valeurs réelles de $y$ et de $z$ qui satisfont aux équations (4), en sorte que

$$A = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}},$$

$$B = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}:$$

soit $\alpha$ l'une des racines cubiques imaginaires de l'unité, l'autre sera $\alpha^2$, les valeurs de $y$ seront

$$A, \quad A\alpha, \quad A\alpha^2,$$

et celles de $z$

$$B, \quad B\alpha, \quad B\alpha^2.$$

Comme les valeurs de $y$ et $z$ qu'il faut ajouter ensemble pour former une racine de l'équation (1) doivent avoir un produit réel, ces racines sont

$$A + B,$$
$$A\alpha + B\alpha^2,$$
$$A\alpha^2 + B\alpha,$$

ou

$$A + B, \quad \text{et} \quad -\frac{A+B}{2} \pm i\frac{A-B}{2}\sqrt{3};$$

car on a

$$\alpha = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2} \quad \text{et} \quad \alpha^2 = \frac{-1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

On voit qu'une seule de ces racines est réelle. Nous allons montrer comment on peut appliquer le calcul des logarithmes à leur détermination; il convient de distinguer dans cette recherche le cas où $p$ est positif et celui où il est négatif.

1°. Soit $p < 0$. Puisque, par hypothèse, on a $\frac{-p^3}{27} < \frac{q^2}{4}$,

on peut poser

$$\sqrt{\frac{-p^3}{27}} = \frac{q}{2}\sin\omega;$$

et l'on a

$$A = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\frac{q}{2}\cos\omega} = \sqrt[3]{-q\sin^2\tfrac{1}{2}\omega},$$

$$B = \sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\frac{q}{2}\cos\omega} = \sqrt[3]{-q\cos^2\tfrac{1}{2}\omega},$$

ou, en remplaçant $q$ par sa valeur $\frac{2}{\sin\omega}\sqrt{\frac{-p^3}{27}}$,

$$A = \sqrt{-\frac{p}{3}}\sqrt[3]{\tang\tfrac{1}{2}\omega}, \quad B = \sqrt{-\frac{p}{3}}\sqrt[3]{\cot\tfrac{1}{2}\omega}.$$

Soit maintenant $\varphi$ un angle auxiliaire, tel que

$$\tang\varphi = \sqrt[3]{\tang\tfrac{1}{2}\omega},$$

on aura

$$A = \sqrt{\frac{-p}{3}}\tang\varphi, \quad B = \sqrt{\frac{-p}{3}}\cot\varphi;$$

par suite, les racines de l'équation (1) sont

$$\left\{\begin{array}{l} \sqrt{\frac{-p}{3}}(\tang\varphi+\cot\varphi), \\ -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{-p}{3}}(\tang\varphi+\cot\varphi) \pm \frac{1}{2}i\sqrt{-p}(\tang\varphi-\cot\varphi), \end{array}\right.$$

ou

$$\frac{2\sqrt{\frac{-p}{3}}}{\sin 2\varphi} \quad \text{et} \quad \frac{-\sqrt{\frac{-p}{3}}}{\sin 2\varphi} \pm i\sqrt{-p}\cot 2\varphi.$$

On pourra calculer par les Tables, à l'aide de ces formules, la racine réelle, ainsi que le coefficient de $i$ dans les racines imaginaires.

2°. Soit $p > 0$. On posera

$$\sqrt{\frac{p^3}{27}} = \frac{q}{2}\tang\omega;$$

il vient alors

$$A=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\frac{q}{2\cos\omega}}=\sqrt[3]{\frac{q\sin^2\frac{1}{2}\omega}{\cos\omega}},$$

$$B=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\frac{q}{2\cos\omega}}=\sqrt[3]{\frac{-q\cos^2\frac{1}{2}\omega}{\cos\omega}},$$

ou, en remplaçant $q$ par $\dfrac{2\sqrt{\frac{p^3}{27}}}{\tang\omega}$,

$$A=\sqrt{\frac{p}{3}}\sqrt[3]{\tang\frac{1}{2}\omega},\qquad B=-\sqrt{\frac{p}{3}}\sqrt[3]{\cot\frac{1}{2}\omega}.$$

Calculant comme précédemment un angle auxiliaire $\varphi$, tel que

$$\tang\varphi=\sqrt[3]{\tang\tfrac{1}{2}\omega},$$

il vient

$$A=\sqrt{\frac{p}{3}}\tang\varphi,\qquad B=-\sqrt{\frac{p}{3}}\cot\varphi,$$

et les racines de l'équation (1) sont

$$\left\{\begin{array}{l}\sqrt{\frac{p}{3}}(\tang\varphi-\cot\varphi),\\ -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{p}{3}}(\tang\varphi-\cot\varphi)\pm i\frac{\sqrt{p}}{2}(\tang\varphi+\cot\varphi);\end{array}\right.$$

ou

$$2\sqrt{\frac{p}{3}}\cot 2\varphi\quad\text{ et }\quad-\sqrt{\frac{p}{3}}\cot 2\varphi\pm i\frac{\sqrt{p}}{\sin 2\varphi}.$$

*Expressions des puissances du sinus et du cosinus d'un arc en fonction linéaire des sinus et cosinus des multiples de cet arc.*

**210.** Soient

$$\cos a+i\sin a=u,\qquad \cos a-i\sin a=v;$$

on a

$$2\cos a=u+v,\qquad 2i\sin a=u-v,$$

et, par suite,

$$2^n \cos^n a = (u+v)^n, \qquad (2i)^n \sin^n a = (u-v)^n,$$

ou, en développant,

$$(1) \qquad 2^n \cos^n a = u^n + \frac{n}{1} u^{n-1} v + \frac{n(n-1)}{1.2} u^{n-2} v^2 + \ldots,$$

$$(2) \qquad (2i)^n \sin^n a = u^n - \frac{n}{1} u^{n-1} v + \frac{n(n-1)}{1.2} u^{n-2} v^2 + \ldots.$$

Occupons-nous d'abord de l'équation (1). Si $n$ est pair, le second membre de l'équation (1) renferme un terme du milieu, et, en groupant ensemble les termes également éloignés des extrêmes, il vient

$$2^n \cos^n a = (u^n + v^n) + \frac{n}{1} uv(u^{n-2} + v^{n-2}) + \ldots$$
$$+ \frac{n(n-1)\ldots\left(\frac{n}{2}+3\right)}{1.2.\ldots\left(\frac{n}{2}-1\right)} u^{\frac{n}{2}-1} v^{\frac{n}{2}-1} (u^2+v^2) + \frac{n(n-1)\ldots\left(\frac{n}{2}+1\right)}{1.2\ldots\frac{n}{2}} u^{\frac{n}{2}} v^{\frac{n}{2}}.$$

Si $n$ est impair, le second membre a un nombre pair de termes, et, en groupant comme précédemment les termes également distants des extrêmes, il vient

$$2^n \cos^n a = (u^n + v^n) + \frac{n}{1} uv(u^{n-2} + v^{n-2}) + \frac{n(n-1)}{1\ 2} u^2 v^2 (u^{n-4} + v^{n-4}) + \ldots$$
$$+ \frac{n(n-1)\ldots\left(\frac{n+3}{2}\right)}{1.2\ldots\frac{n-1}{2}} u^{\frac{n-1}{2}} v^{\frac{n-1}{2}} (u+v).$$

D'ailleurs $uv = 1$ et $u^m + v^m = 2\cos ma$; on a donc, si $n$ est pair,

$$(3) \left\{ \begin{aligned} & 2^{n-1} \cos^n a = \cos na + \frac{n}{1} \cos(n-2)a + \ldots \\ & + \frac{n(n-1)\ldots\left(\frac{n}{2}+3\right)}{1.2\ldots\left(\frac{n}{2}-1\right)} \cos 2a + \frac{n(n-1)\ldots\left(\frac{n}{2}+1\right)}{1.2\ldots\frac{n}{2}} \cdot \frac{1}{2}, \end{aligned} \right.$$

et, si $n$ est impair,

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} 2^{n-1}\cos^n a = \cos na + \frac{n}{1}\cos(n-2)a + \frac{n(n-1)}{1.2}\cos(n-4)a + \ldots \\ + \frac{n(n-1)\ldots\left(\frac{n+3}{2}\right)}{1.2\ldots\frac{n-1}{2}}\cos a. \end{aligned}\right.$$

Occupons-nous maintenant de l'équation (2). Si $n$ est pair, le second membre renferme un nombre impair de termes; les termes également distants des extrêmes ont le même signe, et, en les groupant ensemble, il vient

$$2^n(-1)^{\frac{n}{2}}\sin^n a = (u^n+v^n) - \frac{n}{1}uv(u^{n-2}+v^{n-2}) + \frac{n(n-1)}{1.2}u^2v^2(u^{n-4}+v^{n-4}) - \ldots$$
$$\pm \frac{n(n-1)\ldots\left(\frac{n}{2}+3\right)}{1.2\ldots\left(\frac{n}{2}-1\right)}u^{\frac{n}{2}-1}v^{\frac{n}{2}-1}(u^2+v^2) \mp \frac{n(n-1)\ldots\left(\frac{n}{2}+1\right)}{1.2\ldots\frac{n}{2}}u^{\frac{n}{2}}v^{\frac{n}{2}},$$

ou

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned} 2^{n-1}(-1)^{\frac{n}{2}}\sin^n a = \cos na - \frac{n}{1}\cos(n-2)a + \frac{n(n-1)}{1.2}\cos(n-4)a - \ldots \\ \pm \frac{n(n-1)\ldots\left(\frac{n}{2}+3\right)}{1.2\ldots\left(\frac{n}{2}-1\right)}\cos 2 \mp a\,\frac{n(n-1)\ldots\left(\frac{n}{2}+1\right)}{1.2\ldots\frac{n}{2}}\cdot\frac{1}{2}. \end{aligned}\right.$$

Si $n$ est impair, le second membre de l'équation (2) renferme un nombre pair de termes, et les termes également distants des extrêmes sont de signes contraires; en les groupant ensemble, il vient

$$2^n(-1)^{\frac{n-1}{2}}i\sin^n a = (u^n-v^n) - \frac{n}{1}uv(u^{n-2}-v^{n-2}) + \frac{n(n-1)}{1.2}u^2v^2(u^{n-4}-v^{n-4}) - \ldots$$
$$\pm \frac{n(n-1)\ldots\left(\frac{n+3}{2}\right)}{1.2\ldots\frac{n-1}{2}}u^{\frac{n-1}{2}}v^{\frac{n-1}{2}}(u-v).$$

On a d'ailleurs

$$u^m - v^m = 2i \sin ma;$$

donc

$$(6)\quad\left\{\begin{aligned} &2^{n-1}(-1)^{\frac{n-1}{2}} \sin^n a = \sin na - \frac{n}{1}\sin(n-2)a + \frac{n(n-1)}{1.2}\sin(n-4)a - \ldots \\ &\qquad \pm \frac{n(n-1)\ldots\left(\frac{n+3}{2}\right)}{1.2\ldots\frac{n-1}{2}} \sin a. \end{aligned}\right.$$

On voit que $\cos^n a$ s'exprime, dans tous les cas, par une fonction linéaire des cosinus des multiples de $a$, et que $\sin^n a$ s'exprime pareillement en fonction des cosinus, ou en fonction des sinus des multiples de l'arc $a$, suivant que $n$ est pair ou impair.

*Développements du sinus et du cosinus d'un arc en séries ordonnées suivant les puissances de l'arc.*

**211.** Les formules (1) du nº **187** peuvent s'écrire de la manière suivante :

$$(1)\quad\left\{\begin{aligned} \cos ma &= \cos^m a \left[\begin{aligned} &1 - \frac{m(m-1)}{1.2}\tang^2 a + \ldots \\ &\pm \frac{m(m-1)\ldots(m-2n+1)}{1.2\ldots 2n}\tang^{2n} a \mp R_{2n} \end{aligned}\right], \\ \sin ma &= \cos^m a \left[\begin{aligned} &\frac{m}{1}\tang a - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\tang^3 a + \ldots \\ &\pm \frac{m(m-1)\ldots(m-2n)}{1.2\ldots(2n+1)}\tang^{2n+1} a \mp R_{2n+1} \end{aligned}\right], \end{aligned}\right.$$

en posant

$$R_p = \frac{m\ldots(m-p-1)}{1.2\ldots(p+2)}\tang^{p+2} a - \frac{m\ldots(m-p-3)}{1.2\ldots(p+4)}\tang^{p+4} a + \ldots,$$

ou, pour abréger,

$$R_p = u_p - u_{p+1} + u_{p+2} - \ldots.$$

$R_{2n}$ et $R_{2n+1}$ mesurent les erreurs que l'on commet, en négligeant les puissances de tang $a$ supérieures à la $(2n+1)^{ième}$ dans les va-

leurs de $\frac{\cos ma}{\cos^m a}$ et $\frac{\sin ma}{\cos^m a}$ ; nous allons chercher à assigner les limites de ces erreurs, en supposant l'arc $a$ compris entre o et $\frac{\pi}{4}$, c'est-à-dire $\tang a < 1$. On a

$$\frac{u_{p+1}}{u_p} = \frac{(m-p-2)(m-p-3)}{(p+3)(p+4)} \tang^2 a,$$
$$\frac{u_{p+2}}{u_{p+1}} = \frac{(m-p-4)(m-p-5)}{(p+5)(p+6)} \tang^2 a,$$
etc.;

et l'on voit que, si la première de ces fractions est moindre que 1, les autres seront aussi, à fortiori, moindres que 1; par conséquent les termes de $R_p$, dont le nombre est limité, iront en décroissant. Or on peut écrire

$$R_p = u_p - (u_{p+1} - u_{p+2}) - (u_{p+3} - u_{p+4}) - \ldots;$$

donc

$$R_p < u_p,$$

et, en désignant par $\zeta$ une fonction comprise entre o et 1, on a

$$R_p = \zeta u_p:$$

la seule condition à remplir est

$$\frac{(m-p-2)(m-p-3)}{(p+3)(p+4)} \tang^2 a < 1$$

Si cette inégalité est satisfaite pour $p = 2n$, elle le sera, à fortiori, pour $p = 2n+1$; les équations (1) peuvent donc s'écrire comme il suit :

$$(2) \left\{ \begin{aligned} \cos ma &= \cos^m a \left\{ \begin{aligned} &1 - \frac{m(m-1)}{1.2} \tang^2 a + \ldots \\ &\pm \frac{m(m-1)\ldots(m-2n+1)}{1.2\ldots 2n} \tang^{2n} a \\ &\mp \theta \frac{m(m-1)\ldots(m-2n-1)}{1.2\ldots(2n+2)} \tang^{2n+2} a \end{aligned} \right\}, \\ \sin ma &= \cos^m a \left\{ \begin{aligned} &\frac{m}{1} \tang a - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} \tang^3 a + \ldots \\ &\pm \frac{m(m-1)\ldots(m-2n)}{1.2\ldots(2n+1)} \tang^{2n+1} a \\ &\mp \lambda \frac{m(m-1)\ldots(m-2n-2)}{1.2\ldots(2n+3)} \tang^{2n+3} a \end{aligned} \right\}; \end{aligned} \right.$$

en désignant par $\theta$ et $\lambda$ les deux fractions moindres que 1 auxquelles se réduit $\zeta$ pour $p=2n$ et $p=2n+1$.

Dans les seconds membres de ces équations, le nombre des termes ne dépend pas de $m$, et peut rester le même quand on fait varier $m$, pourvu que le nombre $n$ satisfasse toujours à l'inégalité

$$(3)\qquad \frac{(m-2n-2)(m-2n-3)}{(2n+3)(2n+4)}\tang^2 a<1.$$

**212.** Les formules (2) vont nous conduire aisément aux développements de $\cos x$ et de $\sin x$ en séries ordonnées suivant les puissances de $x$. Posons, en effet, $ma=x$, d'où $m=\frac{x}{a}$, on peut écrire les équations (2) comme il suit :

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\cos x}{\cos^m \frac{x}{m}} &= 1-\frac{x(x-a)}{1.2}\left(\frac{\tang a}{a}\right)^2+\ldots \\ &\pm\frac{x(x-a)\ldots(x-2na+a)}{1.2\ldots 2n}\left(\frac{\tang a}{a}\right)^{2n} \\ &\mp\theta\,\frac{x(x-a)\ldots(x-2na-a)}{1.2\ldots(2n+2)}\left(\frac{\tang a}{a}\right)^{2n+2}, \\ \frac{\sin x}{\cos^m \frac{x}{m}} &= \frac{x}{1}\left(\frac{\tang a}{a}\right)-\frac{x(x-a)(x-2a)}{1.2.3}\left(\frac{\tang a}{a}\right)^3+\ldots \\ &\pm\frac{x(x-a)\ldots(x-2na)}{1.2\ldots(2n+1)}\left(\frac{\tang a}{a}\right)^{2n+1} \\ &\mp\lambda\,\frac{x(x-a)\ldots(x-2na-2a)}{1.2\ldots(2n+3)}\left(\frac{\tang a}{a}\right)^{2n+3}; \end{aligned}\right.$$

et l'inégalité de condition (3) devient

$$(5)\qquad \frac{(x-2na-2a)(x-2na-3a)}{(2n+3)(2n+4)}\left(\frac{\tang a}{a}\right)^2<1.$$

Supposons maintenant que $n$ étant un nombre aussi grand que l'on voudra, mais invariable, on fasse augmenter indéfiniment l'entier $m$, de manière que le produit $ma=x$ reste constant ; on aura à la limite $a=0$, $\frac{\tang a}{a}=1$, et si l'on admet, pour un

moment, que la limite de $\cos^m \frac{x}{m}$, pour $m = \infty$, est l'unité, les équations (4) deviennent

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots \pm \frac{x^{2n}}{1.2\ldots 2n} \\ &\mp \theta \frac{x^{2n+2}}{1.2\ldots(2n+2)}, \\ \sin x &= \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots \pm \frac{x^{2n+1}}{1.2\ldots(2n+1)} \\ &\mp \lambda \frac{x^{2n+3}}{1.2\ldots(2n+3)}; \end{aligned}\right.$$

d'ailleurs l'inégalité de condition (5) se réduit à

$$(7)\qquad \frac{x^2}{(2n+3)(2n+4)} < 1.$$

Les équations (6), où $\theta$ et $\lambda$ désignent toujours des fractions comprises entre 0 et 1, ont lieu pour toutes les valeurs de $n$ qui satisfont à la condition (7).

Supposons maintenant que l'entier $n$ augmente indéfiniment; les fractions

$$\frac{x^{2n+2}}{1.2\ldots(2n+2)} = \frac{x}{1}\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{x}{3}\cdots\frac{x}{2n+2},$$

$$\frac{x^{2n+3}}{1.2\ldots(2n+3)} = \frac{x}{1}\cdot\frac{x}{2}\cdots\cdots\frac{x}{2n+3},$$

ont pour limite zéro, car ce sont des produits dont les facteurs plus grands que 1 sont en nombre limité, tandis que le nombre de ceux qui sont inférieurs à 1, et même à telle fraction que l'on voudra, peut devenir plus grand que tout nombre donné : on peut donc écrire

$$(8)\quad \left\{\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots, \\ \sin x &= \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} - \ldots. \end{aligned}\right.$$

Ce sont les séries que nous voulons obtenir; elles sont comprises

dans les formules (6), qui font connaître en même temps les *restes* de ces séries, c'est-à-dire les erreurs que l'on commet en s'arrêtant à un terme quelconque. Comme ces restes ont pour limite zéro, quand le nombre des termes que l'on prend augmente indéfiniment, on peut conclure que les séries (8) sont *convergentes* pour toute valeur de $x$.

**213.** Il nous reste à prouver un fait que nous avons admis, c'est que la limite de $\cos^m \frac{x}{m}$, lorsque l'entier $m$ augmente indéfiniment, est l'unité. On a (n° 81)

$$\cos \frac{x}{m} > 1 - \frac{x^2}{2m^2},$$

et

$$\cos^m \frac{x}{m} > \left(1 - \frac{x^2}{2m^2}\right)^m > 1 - \frac{x^2}{2m} + \ldots;$$

or je dis que, si $m$ est suffisamment grand, chaque terme du second membre est moindre en valeur absolue que le précédent. En effet, du terme qui en a $p$ avant lui, on déduit le suivant, en le multipliant par $\frac{m-p}{p+1} \frac{x^2}{2m^2}$ ou $\frac{1}{2m}\left(1 - \frac{p}{m}\right)\frac{x^2}{p+1}$, fraction qui peut devenir moindre que tout nombre donné; donc, en écrivant l'inégalité précédente comme il suit :

$$\cos^m \frac{x}{m} > 1 - \frac{x^2}{2m} + \left(\frac{m(m-1)}{1.2}\frac{x^4}{4m^4} - \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3}\frac{x^6}{8m^6}\right) + \ldots,$$

on voit que $\cos^m \frac{x}{m}$ est plus grand que $1 - \frac{x^2}{2m}$ augmenté d'une suite de nombres positifs, par conséquent,

$$\cos^m \frac{x}{m} > 1 - \frac{x^2}{2m}.$$

D'après cela, $\cos^m \frac{x}{m}$ est compris entre 1 et $1 - \frac{x^2}{2m}$; ce dernier nombre est 1 pour $m = \infty$, donc

$$\lim \cos^m \frac{x}{m} = 1, \quad \text{pour} \quad m = \infty,$$

ce qu'il fallait démontrer.

**214.** Les développements qui précèdent permettent de considérer les fonctions sin $x$ et cos $x$ sous un point de vue beaucoup plus général que celui sous lequel nous les avons envisagées jusqu'ici. On voit, en effet, que si l'on définit ces fonctions comme étant les limites des séries convergentes

$$\frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots, \quad 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \ldots,$$

on pourra attribuer à la variable $x$ des valeurs imaginaires; ce qui jusqu'ici n'eût présenté aucun sens; on voit d'ailleurs aisément que les séries (8) ne cessent pas d'être convergentes, quand $x$ désigne une expression imaginaire $\rho(\cos\omega + i \sin\omega)$ [*].

Toute relation entre les sinus et cosinus de plusieurs arcs, comme, par exemple,

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$$
$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y,$$

continuera d'avoir lieu, si $x$ et $y$ désignent des expressions imaginaires; en effet, si l'on remplace les sinus et cosinus par les séries qui les représentent, les deux membres de chacune de ces relations seront identiquement égaux, et l'identité ne cessera pas d'avoir lieu lorsque $x$ et $y$, au lieu d'être des nombres réels, désigneront des expressions imaginaires.

## *Formules pour la construction des Tables de logarithmes des fonctions circulaires.*

**215.** Théorème. — *L'équation* sin $x = 0$, *c'est-à-dire*

$$0 = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \ldots,$$

*n'a aucune racine imaginaire.*

Supposons, en effet, que l'on ait

$$\sin(a + bi) = 0,$$

[*] Une série dont les termes sont imaginaires est convergente, lorsque les parties réelles de ses termes forment une série convergente, ainsi que les coefficients de $i$.

ou

$$(1) \qquad \sin a \cos bi + \cos a \sin bi = 0\,;$$

on a

$$\sin bi = i\left(b + \frac{b^3}{1.2.3} + \frac{b^5}{1.2.3.4.5} + \ldots\right),$$

$$\cos bi = 1 + \frac{b^2}{1.2} + \frac{b^4}{1.2.3.4} + \ldots,$$

et l'équation (1) se décompose dans les deux suivantes :

$$\sin a\left(1 + \frac{b^2}{1.2} + \frac{b^4}{1.2.3.5} + \ldots\right) = 0,$$

$$\cos a\left(b + \frac{b^3}{1.2.3} + \frac{b^5}{1.2.3.4.5} + \ldots\right) = 0.$$

La première exige que $\sin a$ soit nul, car le deuxième facteur ne peut être nul pour une valeur réelle de $b$; et la seconde équation ne peut alors être satisfaite que pour $b = 0$. Le théorème est ainsi démontré.

Corollaire. — *L'équation* $\cos x = 0$ *n'a pas non plus de racine imaginaire, car* $\cos x$ *n'est autre chose que* $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

**216.** Considérons les équations

$$\frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots \pm \frac{x^{2n+1}}{1.2\ldots(2n+1)} = 0,$$

$$1 - \frac{x^2}{1.2} + \ldots\ldots \pm \frac{x^{2n}}{1.2\ldots 2n} = 0;$$

désignons par $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ les $2n$ racines de la première autres que zéro, et par $b_1, b_2, \ldots, b_{2n}$ les $2n$ racines de la seconde, on aura *identiquement*

$$\frac{x}{1} - \frac{x^3}{1.2.3} + \ldots \pm \frac{x^{2n+1}}{1.2\ldots(2n+1)}$$

$$= x\left(1 - \frac{x}{a_1}\right)\left(1 - \frac{x}{a_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{x}{a_{2n}}\right),$$

$$1 - \frac{x^2}{1.2} + \ldots \pm \frac{x^{2n}}{1.2\ldots 2n}$$

$$= \left(1 - \frac{x}{b_1}\right)\left(1 - \frac{x}{b_2}\right)\cdots\left(1 - \frac{x}{b_{2n}}\right).$$

Ces identités ayant lieu quel que soit $n$, on peut admettre qu'elles ont lieu encore pour $n=\infty$ : alors les premiers membres se réduisent à $\sin x$ et $\cos x$. Les racines de $\sin x = 0$ sont

$$\pm\pi,\quad \pm 2\pi,\quad \pm 3\pi,\quad \pm\ldots;$$

celles de $\cos x = 0$ sont

$$\pm\frac{\pi}{2},\quad \pm\frac{3\pi}{2},\quad \pm\frac{5\pi}{2},\quad \pm\ldots;$$

on a donc

$$(1)\quad \begin{cases} \sin x = x\left(1-\dfrac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\dfrac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\dfrac{x^2}{9\pi^2}\right)\ldots, \\ \cos x = \left(1-\dfrac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\dfrac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\dfrac{4x^2}{25\pi^2}\right)\ldots \end{cases}$$

Prenons les logarithmes, dans un système quelconque au module M, des deux membres de ces équations, on aura

$$(2)\begin{cases} \log\sin x = \log x + \log\left(1-\dfrac{x^2}{\pi^2}\right) + \log\left(1-\dfrac{x^2}{4\pi^2}\right) + \log\left(1-\dfrac{x^2}{9\pi^2}\right) + \ldots, \\ \log\cos x = \log\left(1-\dfrac{4x^2}{\pi^2}\right) + \log\left(1-\dfrac{4x^2}{9\pi^2}\right) + \log\left(1-\dfrac{4x^2}{25\pi^2}\right) + \ldots; \end{cases}$$

ou, en posant $x = \dfrac{m\pi}{2n}$,

$$(3)\begin{cases} \log\sin\dfrac{m\pi}{2n} = \log\dfrac{\pi}{2} + \log m - \log n \\ \qquad + \log\left(1-\dfrac{m^2}{4n^2}\right) + \log\left(1-\dfrac{m^2}{16n^2}\right) + \log\left(1-\dfrac{m^2}{36n^2}\right) + \ldots, \\ \log\cos\dfrac{m\pi}{2n} = \log\left(1-\dfrac{m^2}{n^2}\right) + \log\left(1-\dfrac{m^2}{9n^2}\right) + \log\left(1-\dfrac{m^2}{25n^2}\right) + \ldots \end{cases}$$

Enfin, en faisant usage de la série connue

$$\log(1-z) = -M\left(\frac{z}{1} + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \ldots\right),$$

et qui est convergente tant que $z$ est $< 1$, on a

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned}
\log\sin\frac{m\pi}{2n} = {} & \log\frac{\pi}{2} + \log m - \log n \\
& -\frac{m^2}{n^2}\frac{M}{1}\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{8^2}+\ldots\right) \\
& -\frac{m^4}{n^4}\frac{M}{2}\left(\frac{1}{2^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{6^4}+\frac{1}{8^4}+\ldots\right) \\
& -\frac{m^6}{n^6}\frac{M}{3}\left(\frac{1}{2^6}+\frac{1}{4^6}+\frac{1}{6^6}+\frac{1}{8^6}+\ldots\right) \\
& - \text{etc.} \\
\log\cos\frac{m\pi}{2n} = {} & -\frac{m^2}{n^2}\frac{M}{1}\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\ldots\right) \\
& -\frac{m^4}{n^4}\frac{M}{2}\left(\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\ldots\right) \\
& -\frac{m^6}{n^6}\frac{M}{3}\left(\frac{1}{1^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{7^6}+\ldots\right) \\
& - \text{etc.}
\end{aligned}\right.$$

C'est à l'aide de ces formules (4) que les Tables de Callet ont été construites.

## *Questions proposées.*

1. Démontrer que, si $n$ est un nombre impair, on a, quel que soit $a$,

$$\cos na = 2^{n-1}\cos a\cos\left(a+\frac{2\pi}{n}\right)\cos\left(a+\frac{4\pi}{n}\right)\ldots\cos\left(a+\frac{2(n-1)\pi}{n}\right).$$

2. Démontrer que la somme des puissances $n$ des distances d'un point aux sommets d'un polygone régulier de $m$ côtés ne dépend que de la distance du point au centre du polygone.

FIN.





SEPTEMBRE 1850.

**IMPRIMERIE ET LIBRAIRIE**
**Pour les Mathématiques, la Marine, les Sciences et les Arts en général.**

# EXTRAIT DU CATALOGUE DES LIVRES

**Qui se trouvent chez BACHELIER, Imprimeur-Libraire de l'École Polytechnique, du Bureau des Longitudes, de l'École centrale des Arts et Manufactures, etc.,**

QUAI DES AUGUSTINS, N° 55.

## OUVRAGES ADOPTÉS PAR L'UNIVERSITÉ DE FRANCE,

**POUR L'ENSEIGNEMENT DANS LES COLLÉGES, ETC., ET DESTINÉS AUX CANDIDATS POUR LES ÉCOLES POLYTECHNIQUE, MILITAIRE, DE MARINE, ETC.**

### Ouvrages de LACROIX.

COURS DE MATHÉMATIQUES à l'usage de l'École centrale des Quatre-Nations, Ouvrage adopté par le Gouvernement pour les Lycées, Écoles secondaires, Colléges, etc.; 10 vol. in-8., 51 fr.

*Chaque volume du Cours se vend séparément, savoir :*

Traité élémentaire d'Arithmétique, 20e édition, 1848, 2 fr.
Élémens d'Algèbre, 19e édition, 1849, 4 fr.
Élémens de Géométrie, 16e édition, 1848, 4 fr.
Traité élémentaire de Trigonométrie rectiligne et sphérique et d'Application de l'Algèbre à la Géométrie, 9e édition, 4 fr.
Complément des Élémens d'Algèbre, 6e édition, 4 fr.
Complément des Élémens de Géométrie, ou Élémens de Géométrie descriptive, 7e édition, 3 fr.
Traité élémentaire de Calcul différentiel et de Calcul intégral, 6e édit., *sous presse.*
Essais sur l'Enseignement en général, et sur celui des Mathématiques en particulier, ou Manière d'étudier et d'enseigner les Mathématiques, 1 volume in-8.; quatrième édition, revue et augmentée, 5 fr.
Traité élémentaire du Calcul des Probabilités, in-8., 3e édit., 1833, avec une pl. 5 fr.
Introduction à la Géographie mathématique et physique. 2e édit., in-8., avec cartes, 1847. 10 fr.
Introduction à la connaissance de la sphère, in-18., 1 fr. 25.

TRAITÉ COMPLET DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL, 3 vol. in-4., 100 fr.

Le *Traité élémentaire d'Arithmétique*; les *Élémens d'Algèbre*, qui ne contiennent que les principes et les méthodes d'une application usuelle; les *Élémens de Géométrie*, où l'Auteur a tâché de concilier les rigueurs des démonstrations avec l'ordre naturel des propositions; et le *Traité élémentaire de Trigonométrie et d'Application de l'Algèbre à la Géométrie*, composent un Cours élémentaire après lequel on peut passer immédiatement au *Traité de Calcul différentiel et de Calcul intégral*. L'Auteur a évité l'emploi des formules de l'Algèbre supérieure, afin de ne pas retarder l'entrée des Élèves dans la Mécanique et ses applications, qui sont ordinairement le but principal de l'étude des Mathématiques. Il n'a cessé, à chaque édition, de perfectionner les détails de ses ouvrages et de veiller à leur correction.

**TRAITÉ DE MÉCANIQUE**, par S.-D. POISSON; DEUXIÈME ÉDITION, CONSIDÉRABLEMENT AUGMENTÉE, 2 forts volumes in-8., avec planches, 18 fr.
Cette édition est entièrement différente de la première, et pour la rédaction, et pour l'ordre que l'auteur a suivi dans l'exposition des matières; cet ordre est celui

que l'on a adopté, dans ces derniers temps, à l'École Polytechnique, et qui paraît le mieux convenir à l'enseignement. Quoique cet ouvrage suit un traité de Mécanique rationnelle, l'auteur n'a cependant pas négligé d'indiquer les principales applications de cette science à la Mécanique pratique. Les autres exemples nécessaires pour éclaircir les questions générales ont été multipliés et choisis, surtout dans l'Astronomie et dans la Physique, et quelques-uns dans l'Artillerie. De cette manière, l'ouvrage peut servir à faciliter la lecture de la *Mécanique céleste*; on y trouve aussi tous les principes de la *Physique mathématique* dont l'auteur s'est occupé dans différens Mémoires. Le Traité de Mécanique que nous annonçons peut servir d'introduction aux ouvrages où les auteurs se sont proposé de réunir et de développer les théories physiques auxquelles on a appliqué, jusqu'à présent avec quelque succès, l'analyse mathématique.

**COURS DE GÉOMÉTRIE ÉLÉMENTAIRE**, à l'usage des Élèves qui se destinent à l'École Polytechnique; par M. VINCENT, Professeur de Mathématiques au Collége Saint-Louis. *Ouvrage adopté par l'Université pour l'enseignement de la Géométrie.* CINQUIÈME ÉDITION, revue conjointement par l'*Auteur* et par M. BOURDON; 1 vol. in-8., avec 22 planches, 7 fr.

**ABRÉGÉ DU COURS DE GÉOMÉTRIE**, par M. VINCENT, rédigé conjointement par l'Auteur et par M. BOURDON. *Ouvrage adopté par l'Université.* Vol. in-8., 5 fr.

**TABLES DE LOGARITHMES**, par LALANDE, de 1 à 10,000, à **CINQ DÉCIMALES**; édit. stéréot., tirage de 1850, in-18. 2 fr.

— LES MÊMES, reliées en demi-reliure, 2 fr. 75 c.

**TABLES DE LOGARITHMES**, de LALANDE, étendues à **SEPT DÉCIMALES**, par MARIE, précédées d'une Instruction, dans laquelle on fait connaître les limites des erreurs qui peuvent résulter de l'emploi des Logarithmes des nombres et des lignes trigonométriques; par le Baron REYNAUD, ex-examinateur des candidats pour l'École Polytechnique, etc.; in-12, STÉRÉOTYPE (tirage de 1850, corrigé), 3 fr. 50 c.

— LES MÊMES, reliées en demi-reliure, 4 fr.

BOURDON, *Inspecteur général de l'Université de Paris, Examinateur des Aspirans à l'École Polytechnique.* ÉLÉMENS D'ARITHMÉTIQUE, 1 vol. in-8, 25e édition, revue et corrigée, 1850, 5 fr.

— ÉLÉMENS D'ALGÈBRE, 10e édition, 1 fort vol. in-8., 1848, 8 fr.

— APPLICATION DE L'ALGÈBRE A LA GÉOMÉTRIE, contenant les deux Trigonométries et la Géométrie à trois dimensions; 4e édition, 1 fort vol. in-8., avec 15 planches, 7 fr. 50 c.

BIOT, Membre de l'Institut, professeur au Collége de France, etc. TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE D'ASTRONOMIE PHYSIQUE, destiné à l'enseignement dans les Colléges, etc., 3e édition, entièrement refondue et considérablement augmentée; 5 forts vol. in-8. et 5 atlas.

Les 1er, 2e, 3e et 4e Volumes, avec quatre atlas ensemble de 81 planches, sont en vente. Prix : 65 fr., dont 10 fr. à-compte sur le dernier volume.

— ESSAI DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE appliquée aux courbes et aux surfaces du second ordre; in-8., avec 10 planches, 8e édition, revue, corrigée et augmentée,

GOURÉ, proviseur du Lycée de Vendôme, etc. ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE ET DE TRIGONOMÉTRIE, à l'usage des candidats aux Écoles Polytechnique, Militaire, Navale et Forestière; 3e édition, in-8., 1849. (Ouvrage adopté par l'Université.) 7 fr.

— ÉLÉMENTS D'ARITHMÉTIQUE; in-8., 1849, *Ouvrage adopté par l'Université.* 5 fr.

LEFEBURE DE FOURCY, Examinateur des Aspirans à l'École Polytechnique, etc. Leçons de Géométrie analytique; 1 vol. in-8., 7 fr. 50 c.

— Géométrie descriptive, 2 vol. in-8. dont un de pl., 10 fr.

— Leçons d'Algèbre, 7 fr. 50 c.

MAYER, Chef d'une Institution polytechnique, et CHOQUET, Professeur de Mathématiques. TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE D'ALGÈBRE, 1 vol. in-8., CINQUIÈME ÉDITION, 1849. (Ouvrage adopté par l'Université.) 7 fr. 50 c.

BEZOUT. TRAITÉ D'ARITHMÉTIQUE, à l'usage de la Marine et de l'Artillerie, avec des Notes fort étendues et des Tables de Logarithmes, pour les Élèves

qui se destinent à l'École Polytechnique; par A.-A.-L. Reynaud, ex-examinateur des Candidats à l'École Polytech., etc., in-8., 20e édit. stéréot., 3 fr. 50 c.
Le texte pur se vend séparément, 2 fr.
— *Le même*, suivi des tables des poids et mesures et de tables de logarithmes, depuis 1 jusqu'à 10,000; in-8°, 2 fr. 50 c.
Les Notes se vendent aussi séparément 2 fr. 50 c.

— ALGÈBRE et Application de cette science à la Géométrie; nouvelle édition, revue et augmentée de Notes fort étendues par A.-A.-L. Reynaud, ex-Examinateur des Candidats à l'École Polytechnique, etc., in-8., 7 fr. 50 c.
Le *texte pur* se vend séparément, 4 fr.
Les Notes se vendent aussi séparément, 4 fr. 50 c.
— GÉOMÉTRIE contenant la Trigonométrie rectiligne et la Trigonométrie sphérique; suivie des théorèmes et problèmes sur la Géométrie: des élémens de Géométrie descriptive, etc., par Reynaud, 10e édit. avec 28 pl., 1845, 7 fr. 50 c.
Le *texte pur* se vend séparément, 4 fr.
Les Notes se vendent aussi séparément, 4 fr. 50 c.
— TRAITÉ DE NAVIGATION, nouvelle édition, revue et augm. de Notes, et d'une Section supplémentaire où l'on donne la manière de faire les Calculs des Observations avec de nouvelles Tables qui les facilitent; par de Rossel; 1 vol. in-8., avec 10 planches, 7 fr.

COURS DE PHYSIQUE professé à l'École Polytechnique, par M. Lamé, membre de l'Institut, etc.: seconde édition, 3 volumes in-8., 1840,

DIDIEZ. PETIT COURS ÉLÉMENTAIRE D'ARITHMÉTIQUE théorique et pratique à l'usage des commençants; in-18, 1 fr.

HAUY (*l'abbé*). TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE DE PHYSIQUE, adopté par le Conseil de l'Instruction publique pour l'enseignement dans les Colléges; troisième édition, considérablement augmentée, 2 vol. in-8., avec 19 pl., 10 fr.

MONGE. GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE, 7e édition, augmentée d'une théorie des Ombres et de la Perspective, extraite des papiers de l'Auteur; par M. BRISSON, ancien Élève de l'École Polytechnique, Ingénieur en chef des Ponts et Chaussées; 1 vol. in-4., avec 28 planches, 1847. 12 fr.

Quel que soit le mérite des ouvrages qui ont été publiés sur la Géométrie, aucun ne porte cette lumière que cet illustre savant répandait si habilement dans ses leçons. On aime à y retrouver les éclairs de génie que l'auteur distribuait avec tant d'art dans ses discours, et qui électrisaient son auditoire. « En remontant dans le passé, je » crois entendre, dit M. *Francœur*, la voix de Monge, lorsqu'il me fit comprendre » les premières notions des arts qu'il avait assujettis à sa nouvelle doctrine. Je » voyais les voûtes de pierre s'édifier sous ses mains, les charpentes se dresser et » s'assembler à son ordre dans leurs justes proportions, les ombres se distribuer à » sa voix sur les corps mis en perspective..... et ces sublimes leçons, je les re- » trouve dans le Traité de Géométrie descriptive, l'un des plus beaux titres » que ce savant, aussi estimable que modeste, ait à la reconnaissance des hommes » industrieux. »

— APPLICATION DE L'ANALYSE A LA GÉOMÉTRIE, à l'usage de l'École Polytechnique, in-4., 5e édit., revue, corrig. et annotée par M. Liouville, membre de l'Institut. 36 fr.

— TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE DE STATIQUE 8e éd., 1845, vol. in-8., 4 fr.

* LEROY (Professeur à l'École Polytechnique). COURS DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE. — ANALYSE APPLIQUÉE A LA GÉOMÉTRIE DES TROIS DIMENSIONS, contenant les surfaces du 2e ordre, avec la théorie générale des surfaces courbes et des lignes à double courbure; 3e édit., revue, corrigée et augmentée, in-8., 1843. 5 fr.

* POINSOT, membre de l'Institut. ÉLÉMENS DE STATIQUE, adoptés pour l'instruction publique, suivis de quatre Mémoires sur la composition des Moments et des Aires, sur le plan invariable du Système du monde, sur la théorie générale de l'équilibre et du mouvement des systèmes, et sur une théorie nouvelle de la rotation des corps; in-8., 9e édit. avec pl., 1848, 6 fr. 50 c.

COURS D'ANALYSE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE; par M. Duhamel, membre de l'Académie des Sciences, Directeur des études à l'École Polytechnique, 2e édition; 2 vol. in-8., 1847, 10 fr.

COURS DE MÉCANIQUE de l'École polytechnique, par *le même*; 2 vol. in-8. 1845-1846. 11 fr.

ÉLÉMENTS DE TRIGONOMÉTRIE RECTILIGNE ET SPHÉRIQUE, par MM. Delisle, examinateur d'admission à l'École navale, profess. de mathém. spéciales au Collége St-Louis, et Gerono, prof. de mathém.; 2e édition, in-8., 1848. 3 f. 50 c.

**Ouvrages du baron REYNAUD, ex-examinateur des Candidats de l'École Polytechnique, de l'École spéciale Militaire, etc.**

—ARITHMÉTIQUE, à l'usage des Élèves qui se destinent à l'École Polytechnique et à l'École militaire; 24e édition, augmentée d'une Table des Logarithmes des nombres entiers, depuis un jusqu'à dix mille, 1 vol. in-8., 1846, 5 fr.

—ÉLÉMENS D'ALGÈBRE, à l'usage des Élèves qui se destinent à l'École Polytechnique et à l'École spéciale militaire; 1 vol. in-8., 10e édit., 1839, 5 fr.

—TRIGONOMÉTRIE RECTILIGNE ET SPHÉRIQUE; 3e édition, suivie des TABLES DES LOGARITHMES des nombres et des lignes trigonométriques de LALANDE, in-18, avec figures, 1818, 3 fr.

Les TABLES DE LOGARITHMES de LALANDE seules, sans la Trigonométrie, se vendent séparément, 2 fr.

—COURS ÉLÉMENTAIRE DE MATHÉMATIQUES, DE PHYSIQUE ET DE CHIMIE, *suivi* de quelques notions d'Astronomie, à l'usage des élèves qui se destinent à subir les examens pour le Baccalauréat ès lettres; 4e édition, 2 vol. in-8. avec 21 pl., 1844 et 1839, 15 fr.

Ce Cours est entièrement conforme au programme qui a été publié par ordre de l'Université, dans le Manuel pour le Baccalauréat ès lettres.

Le tome 1er, contenant l'Arithmétique, l'Algèbre, la Géométrie et la Trigonométrie, QUATRIÈME ÉDITION, 1844, se vend séparément 7 fr. 50 c.

— ET DUHAMEL. Problèmes et Développemens sur diverses parties des Mathématiques, in-8., 1823, avec 11 planches, 7 fr.

—MANUEL de l'Ingénieur du Cadastre; par MM. Pommiès et Reynaud, in-4., 15 fr.

— TRAITÉ DE TRIGONOMÉTRIE de Lagrive, avec les Notes de Reynaud, in-8., 7 fr.

—NOTES SUR L'ARITHMÉTIQUE de BEZOUT, 16e éd. in-8., 1839, 2 fr. 50 c.

— — SUR LA GÉOMÉTRIE, in-8., 10e édit., 1838, 4 fr. 50 c.

— — SUR L'ALGÈBRE et Application de l'Algèbre à la Géométrie, in-8., 7e édit., 1834, 4 fr. 50 c.

—THÉORÈMES ET PROBLÈMES DE GÉOMÉTRIE, suivis de la théorie des Plans et des préliminaires de la Géométrie descriptive, comprenant la partie exigée pour l'admission à l'École Polyt.; 10e édit. in-8., 1838, avec 21 pl. 5 fr.

— PETIT TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE D'ARITHMÉTIQUE, suivi de notions de Géométrie et de Physique, 2 parties en un vol. in-12, 1835. 3 fr. 50 c.

— NICOLLET ET GERONO. COURS DE MATHÉMATIQUES, à l'usage des Écoles de Marine et des Aspirans à ces Écoles; 3 vol. in-8.

1er vol. Arithmétique et Algèbre, par M. Reynaud (*épuisé*.)

2e vol. Géométrie et Trigonométrie, par M. Nicollet. 7 fr.

3e vol. Statique et Équilibre des machines, par M. Gerono. 5 fr.

---

GARNIER. TRAITÉ D'ARITHMÉTIQUE, 2e édit., in-8., 1808, 2 fr. 50 c.

— ÉLÉMENS D'ALGÈBRE, à l'usage des Aspirans à l'École Polytechnique; 3e édit., in-8., 1811, revue, corrigée et augmentée, 6 fr.

— Suite de ces Élémens, 2e partie, ANALYSE ALGÉBRIQUE, nouv. édit., considérablement augmentée, in-8., 1814, 7 fr. 50 c.

— GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE, ou Application de l'Algèbre à la Géométrie; seconde édition, revue et augmentée, 1 vol. in-8., avec 14 planches, 1813, 7 fr.

— ÉLÉMENS DE GÉOMÉTRIE, contenant les deux Trigonométries, les Élémens de la Polygonométrie et du levé des Plans, et l'Introduction à la Géométrie descriptive; 1 vol. in-8., avec planches, 1812, 5 fr.

— LEÇONS DE STATIQUE, à l'usage des Aspirans à l'École Polytechnique; 1 vol. in-8, avec 12 planches, 1811, 5 fr.

— LEÇONS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL; 3e édition, 1 vol. in-8., avec 4 pl., 1811, 7 fr.

— LEÇONS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL; 2 vol. in-8., avec 4 planches, 1811 et 1812, 14 fr.

— TRISECTION DE L'ANGLE, suivie de Recherches analytiques sur le même sujet; in-8., 1809, 2 fr. 50 c.

GARNIER. DISCUSSION DES RACINES des Équations déterminées du premier degré à plusieurs inconnues, et élimination entre deux équations de degrés quelconques à deux inconnues; 2e édit., vol. in-8., 1 fr. 80 c.

FRANCŒUR, membre de l'Institut, Professeur de la Faculté des Sciences, ex-Examinateur des Candidats de l'École Polytechnique, etc. COURS COMPLET DE MATHÉMATIQUES PURES, Ouvrage destiné aux Élèves des Écoles Normale et Polytechnique, et aux Candidats qui se préparent à y être admis, etc.; 4e édition, revue et augmentée, 2 vol. in-8., avec figures, 1837, 15 fr.

— URANOGRAPHIE ou TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE D'ASTRONOMIE, à l'usage des personnes peu versées dans les Mathématiques, accompagné de planisphères, etc.; 5e édit., consid. augm., dédiée à M. ARAGO; 1 vol. in-8. 1837, avec pl., 10 fr.

— TRAITÉ DE STATIQUE, in-8, 3 fr.

— ASTRONOMIE PRATIQUE, 2e édition, revue et augmentée; 1 vol. in-8., avec 5 pl., 1840. 8 fr.

CLAIRAULT. ÉLÉMENS DE GÉOMÉTRIE à l'usage des écoles primaires; nouvelle édition, 1830, in-8, 4 fr.

— ÉLÉMENS D'ALGÈBRE, 6e édit., avec des Notes et des Additions très-étendues, par M. Garnier; précédé d'un Traité d'Arithmétique par Théveneau, et une Instruction sur les nouveaux poids et mesures; 2 vol. in-8., 1801, 10 fr.

SUZANNE. DE LA MANIÈRE D'ÉTUDIER LES MATHÉMATIQUES; 3 gros vol. in-8., avec figures.

— Première partie, PRÉCEPTES GÉNÉRAUX et ARITHMÉTIQUE; seconde édition, considérablement augmentée, in-8., 6 fr.

BOUCHARLAT, ex-Professeur de Mathématiques transcendantes aux Écoles militaires, Docteur ès Sciences, etc. ÉLÉMENS DE CALCUL DIFFÉRENTIEL et de Calcul intégral, 6e édit., revue et augm., in-8., avec pl., *sous presse*. 10 fr.

— THÉORIE DES COURBES et des Surfaces du second ordre, ou Traité complet d'application de l'Algèbre à la Géométrie; 3e édit., revue, corrigée et aug. de Notes et des principes de la Trigonométrie rectiligne; vol. in-8, avec 14 pl., 1845, 9 fr.

— ÉLÉMENS DE MÉCANIQUE, in-8., 3e édition, revue et augmentée, avec planches, 1840. 8 fr.

SAURI. INSTITUTIONS MATHÉMATIQUES, servant d'introduction à un cours de philosophie à l'usage des Universités de France, 6e édit., 1835, 6 fr.

LOUPOT, Professeur de Mathématiques au Collège de Nîmes. ÉLÉMENS D'ASTRONOMIE, à l'usage des personnes peu versées dans les Mathématiques, in-8°, avec planches, 1842, 5 fr. 50 c.

LAVAUX, chef d'institution primaire. TRAITÉ D'ARITHMÉTIQUE, à l'usage des Écoles normales primaires, des Écoles primaires supérieures et des pensions; in-8., 1845, 5 fr.

— Abrégé du TRAITÉ D'ARITHMÉTIQUE, à l'usage des Écoles primaires élémentaires; in-18, 1845, 1 fr.

---

AMADIEU. NOTIONS ÉLÉMENTAIRES DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE exigées pour l'admission aux diverses Écoles du Gouvernement; in-8., 1838, 2 f. 50.

BAUDUSSON. LE RAPPORTEUR EXACT, ou Tables des cordes de chaque angle, depuis une minute jusqu'à cent quatre-vingts degrés, pour un rayon de mille parties égales; 3e édition, 1842, in-18. 2 fr.

BRESSON. TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE DE MÉCANIQUE APPLIQUÉE AUX SCIENCES PHYSIQUES ET AUX ARTS, in-4., avec un atlas de 18 planc. doubles, 1842, 25 fr.

BRIANCHON. MÉMOIRE sur les lignes du second ordre, 1817, in-8., 2 fr.

CARNOT. RÉFLEXIONS SUR LA MÉTAPHYSIQUE DU CALCUL INFINITÉSIMAL, in-8., 3e édit., 1839, 4 fr.

CATALAN, ancien élève de l'École Polytechnique, répétiteur à ladite École. ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE; 2e tirage, in-8., avec 17 pl., 1847, 5 fr. 50 c.

CONDORCET. MOYENS D'APPRENDRE A COMPTER avec facilité; 3e éd., in-12 (*sous presse*), 1 fr. 50 c.

COURS D'ARITHMÉTIQUE, DE GÉOMÉTRIE ET DE TRIGONOMÉTRIE, à l'usage des Sous-Officiers du Corps d'Artillerie, adopté par M. le Ministre secrétaire d'État au département de la Guerre; in-12, avec 6 planches, 1840, 4 fr.

PONTÉCOULANT (DE), ancien Élève de l'École Polytechnique, Colonel au corps d'État-Major, etc. THÉORIE ANALYTIQUE DU SYSTÈME DU MONDE, 4 vol. in-8, avec Suppléments, 1826, 1834 et 1846,

COURS DE MATHÉMATIQUES, avec des Notes et des Additions par Peyrard. GÉOMÉTRIE, 7e édit. revue corrigée et augmentée, 1832, in-8., 7fr.

COUSIN. TRAITÉ DU CALCUL DIFFÉRENTIEL ET INTÉGRAL, 2 vol. in-4., 6 pl., 21 fr.

— TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE DE L'ANALYSE MATHÉMATIQUE ou D'ALGÈBRE, in-8., 4 fr.

D'ABREU. PRINCIPES MATHÉMATIQUES de feu Joseph-Anastase da Cunha, Professeur à l'Université de Coïmbre (comprenant ceux de l'Arithmétique, de la Géométrie, de l'Algèbre, de son Application à la Géométrie, et du Calcul différentiel et intégral, traités d'une manière entièrement nouvelle), traduit littéralement du portugais; in-8., 1816, 6 fr.

DIDIEZ. COURS COMPLET DE GÉOMÉTRIE, divisé en quatre parties. 1re partie. Géométrie plane, section élémentaire, in-8., 7 fr.

DUBOURGUET. TRAITÉS ÉLÉMENTAIRES DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET DE CALCUL INTÉGRAL, 2 vol. in-8, 1810 et 1811, 16 fr.

DUPIN (Charles). GÉOMÉTRIE ET MÉCANIQUE DES ARTS ET MÉTIERS ET DES BEAUX-ARTS, Cours normal à l'usage des ouvriers et des artistes, des sous-chefs et des chefs d'ateliers et de manufactures; 3 vol. in-8., 1826. 18 fr.

*Les volumes se vendent séparément*:

1er *volume*. GÉOMÉTRIE, ou des Formes nécessaires à l'Industrie, 6 fr.
2me *volume*. MACHINES ÉLÉMENTAIRES nécessaires à l'Industrie, 6 fr.
3me *volume*. FORCES MOTRICES nécessaires à l'Industrie, 6 fr.

JOURNAL DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, par MM. Lagrange, Laplace, Monge, Prony, Fourcroy, Berthollet, Vauquelin, Lacroix, Hachette, Poisson, Sganzin, Guyton-Morveau, Barruel, Legendre, Haüy, Malus, Ampère, Biot, Cauchy, Liouville, etc; 33 cahiers in-4., avec des planches, 330 fr.

*Les cahiers ci-après se vendent séparément.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3e Cahier.................. | 7 f. » | 22e Cahier.................. | 8 50 |
| 4e — .................. | 7 » | 23e — .................. | 8 » |
| 5e — .................. | 7 » | 24e — .................. | 8 » |
| 6e — .................. | 7 » | 25e — .................. | 8 » |
| 7 et 8 — .................. | 10 » | 26e — .................. | 8 » |
| 7 et 8 *bis* (*Mécanique phil.*, par M. Prony)... | 15 » | 27e — .................. | 8 » |
| | | 28e — .................. | 8 » |
| 9e — .................. | 7 » | 29e — .................. | 8 » |
| 11e — .................. | 12 » | 30e — .................. | 8 » |
| 12e — .................. | 22 » | 31e — .................. | 10 » |
| 13e — .................. | 15 » | 32e — .................. | 8 » |
| 16e — .................. | 15 » | 33e — .................. | 10 » |
| 17e — .................. | 15 » | 34e — (Sous presse.) | |
| 20e — .................. | 10 fr. » | | |

Par suite de l'adjudication qui m'a été faite par le *Domaine public*, je suis seul possesseur de la totalité des exemplaires du *Journal de l'École Polytechnique*.

A partir du 23e cahier, j'imprime ce Journal pour mon compte; la copie m'en est remise par M. *le Directeur des Études*.

ÉPURES DE GÉOMÉTRIE DESCRIPTIVE A L'USAGE DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE, contenant 102 planches gravées in-fol. (sans texte), sur la Géométrie descriptive, la Charpente, la Coupe des pierres, la Perspective et les Ombres. Prix en feuilles, 19 fr.

COLLECTION D'ÉPURES DE TOPOGRAPHIE A LUMIÈRE OBLIQUE, in-fol., sans texte, 6 fr. 50 c.

— — DE TOPOGRAPHIE A LUMIÈRE DIRECTE in-fol., sans texte, 6 fr. 50 c.

— — Épures de machines, 4 fr.

— — ÉPURE DE LA MACHINE A VAPEUR, 2 f. avec légende, 1 fr. 55 c.

GASCHEAU. Géométrie descriptive. Traité des Surfaces réglées, in-8., 2 fr. 50 c.

GIAMBONI. ÉLÉMENS D'ALGÈBRE, D'ARITHMÉTIQUE ET DE GÉOMÉTRIE, ou l'Arithmétique et la Géométrie se déduisant des premières notions de l'Algèbre, etc., traduit de l'italien par Roux, *de Genève*, 2 vol. in-8., 9 fr.

HACHETTE, ex-Professeur à l'École Polytechnique. PROGRAMMES D'UN COURS DE PHYSIQUE, ou Précis des leçons sur les principaux phénomènes de la nature, et sur quelques applications des Mathématiques à la Physique, in-8., 1809, 5 fr. 50 c.

POULLET-DELISLE. Professeur de Mathématiques. APPLICATION DE L'ALGÈBRE A LA GÉOMÉTRIE, in-8., 1806, 5 fr.

JUVIGNY. MOYEN DE SUPPLÉER PAR L'ARITHMÉTIQUE A L'EMPLOI DE L'ALGEBRE dans les questions d'intérêts composés, d'annuités, d'amortissemens, etc., terminé par une application spéciale du même procédé à l'extinction de la dette publique, in-8., 2 fr.

LAGRANGE. LEÇONS SUR LE CALCUL DES FONCTIONS, in-4°, 1808. 15 fr.

— TRAITÉ DE LA RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS NUMERIQUES de tous les degrés, avec des Notes sur plusieurs points de la Théorie des Équations algébriques, 3e édition, in-4., 1826, 15 fr.

— THÉORIE DES FONCTIONS ANALYTIQUES, *troisième édition*, revue par M. Serret, in-4., 1847, 18 fr.

— TRAITÉ DE MÉCANIQUE ANALYTIQUE, 2e édit., 2 vol. in-4., 40 fr.

LAPLACE. EXPOSITION DU SYSTEME DU MONDE, précédée de l'eloge de Laplace par Fourier, 6e édition, 1835, in-4., avec portrait, 18 fr.

—— Le même, 2 vol. in-8., 1835. 15 fr.

—ESSAI PHILOSOPHIQUE SUR LES PROBABILITÉS, in-8., 6e éd., 1840, 5 f.

LEFEVRE, Géomètre en chef du Cadastre. — *Abrégé du Nouveau Traité de l'Arpentage*, ou *Guide pratique et mémoratif de l'Arpenteur*, particulièrement destiné aux personnes qui n'ont point étudié la Géométrie; contenant toutes les méthodes nécessaires pour l'Arpentage, le Levé des plans, l'Aménagement des bois, le Nivellement, le Toisé; suivi d'un nouveau mode d'observer les angles de triangulation, etc.; 1 gros vol. in-12, avec 18 pl., dont une coloriée, 6 fr. 50 c.

—— MANUEL DU TRIGONOMETRE, servant de Guide aux jeunes ingénieurs qui se destinent aux opérations géodésiques, suivi de diverses solutions de Géométrie pratique, de quelques Notes et de plusieurs Tableaux, in-8., pl., 1819, 5 fr.

—— APPLICATION DE LA GÉOMÉTRIE à la mesure des lignes inaccessibles et des surfaces planes, etc., ou Longiplanimétrie pratique, in-8., 5 fig, 1827, 5 fr.

LETERRIER. MÉTHODE ET TABLE à l'usage des Géomètres, pour rapporter sans le secours d'autres instrumens que l'échelle et le compas, les angles observés avec le graphomètre et déduits de parallèles; in-18., 1 fr.

LIBES, Professeur de Physique au Lycée Charlemagne à Paris, etc. HISTOIRE PHILOSOPHIQUE DES PROGRÈS DE LA PHYSIQUE, 4 vol. in-8., 20 fr.

—— TRAITE COMPLET ET ÉLÉMENTAIRE DE PHYSIQUE, présenté dans un ordre nouveau, d'après les découvertes modernes; 2e édit., revue, corrigée et considérablement augmentée, 3 vol. in-8., avec fig., 1813, 18 fr.

LUBBE (S.-F.), Professeur à l'Université de Berlin. TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE DE CALCUL DIFFÉRENTIEL ET DE CALCUL INTÉGRAL, traduit de l'allemand par M. Kartseher, in-8., 7 fr.

MASCHERONI. PROBLEMES DE GÉOMÉTRIE, résolus de différentes manières, traduit de l'italien, vol. in-8., 1838, 2e édit., 3 fr. 50 c.

—— GÉOMETRIE DU COMPAS, traduit de l'italien par M. Carette, Officier supérieur du Génie, in-8., 2e édit., augmentée d'une Notice biographique sur l'auteur, 7 fr.

MAUDUIT. LEÇONS ÉLÉMENTAIRES D'ARITHMÉTIQUE, ou Principes d'Analyse numérique, in-8., 1804. 5 fr.

—— LEÇONS DE GEOMETRIE THÉORIQUE ET PRATIQUE, nouv. éd., revue, corrigée et augmentée, 2 vol. in-8., 1817, avec 17 pl., 10 fr.

MOLLET, ex-Doyen de la Faculté des Sciences de Lyon, etc. GNOMONIQUE GRAPHIQUE, ou Méthode simple et facile pour tracer les Cadrans solaires sur toutes sortes de plans et sur les surfaces de la sphère, et du cylindre droit, sans aucun calcul, et en ne faisant usage que de la règle et du compas, suivie de la Gnomonique analytique, etc., 4e édition, 1 vol. in-8., avec pl., 1837, 3 fr. 50.

MONTUCLA. HISTOIRE DES RECHERCHES sur la quadrature du Cercle, nouv. édit. donnée par M. S.-L. (Lacroix), de l'Inst., 1830, in-8., pap. fin sat., 6 fr.

MOULTSON. ARITHMÉTIQUE DES CAMPAGNES à l'usage des écoles primaires, ouvrage adopté par le conseil de l'Université, in-12, 1 fr.

PIERRE (J.-I.). EXERCICES SUR LA PHYSIQUE, ou recueil de Questions, de Problèmes et d'Éclaircissemens, sur les différentes parties de cette science, avec les solutions, 1 vol. in-8., 4 fr.

PUISSANT. TRAITÉ DE GÉODÉSIE ou EXPOSITION DES MÉTHODES TRIGONOMÉTRIQUES ET ASTRONOMIQUES APPLICABLES A LA MESURE DE LA TERRE ET A LA CONSTRUCTION DU CANEVAS DES CARTES TOPOGRAPHIQUES, 3e édit., revue et aug., 2 vol. in-4., avec pl., 18[illegible]. [illegible]o fr.

REGNAULT, Professeur de Mathématiques. TRAITÉ DE GÉOMETRIE, comprenant les opérations graphiques et de nombreuses applications aux travaux d'art et de construction, 1 vol. in-8°, avec 11 planches, 1842. 5 fr.

RIVARD. TRAITÉ DE LA SPHÈRE ET DU CALENDRIER; 8e édit. (faite sur la 6e donnée par M. Lalande), revue et augmentée de notes et additions, par *Puissant*; 1 vol. in-8., avec 3 pl. bien gravées, 1837. 5 fr.
SIMONIN. TRAITÉ D'ARITHMÉTIQUE DÉCIMALE, in-8., 2 fr. 50 c.
SERRET (J.-A.) Examinateur pour l'admission à l'École Polytechnique. TRAITÉ DE TRIGONOMÉTRIE, in-8° de 224 pages, avec planches; 1850. 3 fr. 50 c.
— COURS D'ALGÈBRE SUPÉRIEURE professé à la Faculté des Sciences de Paris; In-8°, 1849, avec Planche. 7 fr. 50 c.
SERVOIS, Professeur aux Écoles d'Artillerie. Essai sur un nouveau mode d'exposition des PRINCIPES DE CALCUL DIFFÉRENTIEL, in-4, 2 fr. 50 c.
SOULAS. LA LEVÉE DES PLANS ET L'ARPENTAGE RENDUS FACILES, précédés de notions élémentaires de Trigonométrie rectiligne à l'usage des employés au Cadastre de la France, deuxième édition, revue et corrigée, 1 vol. in-18., 1820, avec 8 planches, 3 fr.
STAINVILLE. MÉLANGES D'ANALYSE ALGÉBRIQUE ET DE GÉOMÉTRIE, in-8., avec pl., 1815, 7 fr. 50 c.
TERQUEM, professeur aux Écoles d'artillerie. EXERCICES DE MATHÉMATIQUES ÉLÉMENTAIRES, à l'usage des colléges et aspirants aux Écoles Militaire, Polytechnique, Forestière et Navale. ARITHMÉTIQUE et ALGÈBRE, In-8., 1842, 5 fr.
THIERRY fils. MÉTHODE GRAPHIQUE ET GÉOMÉTRIQUE, ou LE DESSIN LINÉAIRE APPLIQUÉ AUX ARTS en général, et en particulier à la projection des ombres, à la pratique de la coupe des pierres, à la perspective linéaire, et aux cinq ordres d'architecture; Ouvrage utile à tous les Artistes et Ouvriers employés à la construction et à la décoration des édifices; aux Maçons, Tailleurs de Pierre, Marbriers, Charpentiers, Serruriers, Menuisiers, Peintres-Décorateurs, et généralement à tous ceux qui exercent des arts graphiques et industriels; 2e édition, revue et corrigée par F.-C.-M. Marie, professeur de Mathématiques et de Topographie. Grand in-8. oblong, avec 50 planches, 1846, 10 fr. 50 c.
TREUIL, Professeur à l'École militaire de Saint-Cyr. ESSAI DE MATHÉMATIQUES, contenant quelques détails sur l'Arithmétique, l'Algèbre, la Géométrie et la Statique, in-8., 1819, 2 fr.
JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES, Recueil mensuel de Mémoires sur les diverses parties des mathématiques; publié par J. Liouville. Il paraît régulièrement un cahier chaque mois.
Prix de l'abonnement par an, 30 fr.
Et franc de port pour les départemens, 35 fr.
Et pour l'étranger, 40 fr.
*Nota*. Ce journal a commencé à paraître le 1er janvier 1836.
ÉLÉMENTS DE CHIMIE EXPÉRIMENTALE ET THÉORIQUE; par Munin, ancien élève de l'École Normale, etc. 2 vol. in 8., avec pl., 1845, 12 fr.
LEÇONS DE CALCUL INTÉGRAL, rédigées d'après les méthodes et les ouvrages publiés ou inédits de M. A.-L. Cauchy, par M. l'*Abbé* Moigno; tome I, in-8°, 1844, 10 fr.
GNOMONIQUE GRAPHIQUE ET ANALYTIQUE, ou l'Art de tracer les Cadrans solaires; par M. Bohn, officier d'artillerie; in-8., avec pl., 3 fr. 50 c.

---

MÉMOIRES DE PHYSIQUE MÉCANIQUE; par G. Wertheim, vol. In-8., avec 4 planches, 1848. 10 fr.
MÉMOIRE SUR LES PROPRIÉTÉS MÉCANIQUES DU BOIS; par E. Chevandier et G. Wertheim, in-8., avec planches, 1848. 4 fr.
GUIDE DES CONSTRUCTEURS, ou Traité complet des connaissances théoriques et pratiques relatives aux Constructions, par M. B.-R. Mignard; 2 vol. grand in-8° sur jésus, avec Atlas de 86 planches; 1847. Prix (pour Paris), 48 fr.
ESQUISSE D'UN TRAITÉ DE LA RÉPUBLIQUE; par G. Lamé, In-8. 1848. 2 fr.

*Sous presse.*

TRAITÉ DE GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE; par M. Chasles, professeur de Géométrie supérieure à la Faculté des Sciences de Paris; in-8 avec planches.

---

Paris. — Imprimerie de BACHELIER, rue du Jardinet-Saint-André-des-Arts, n° 12.

Fig. 4.

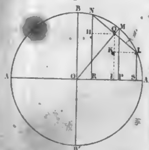



Fig. 5.

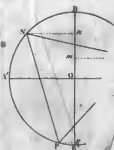



Fig. 9.




Fig. 10.




Fig. 11.




Fig




BIBLIOTECA NAZIONALE "VITTORIO EMANUELE III"
NAPOLI



